This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Phys. 420.5.2

Harvard College Library

FROM THE FUND OF

CHARLES MINOT
(Class of 1828).

Received 17 Nov. 1900.

SCIENCE CENTER LIBRARY

TRAITÉ PRATIQUE

DE LA

THERMOMÉTRIE

DE PRÉCISION.

14313 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ PRATIQUE

DE LA

THERMOMÉTRIE

DE PRÉCISION,

PAR

Ch.-Ed. GUILLAUME,

DOCTEUR ÈS SCIENCES,

ATTACHÉ AU BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

(Tous droits réservés.)

Phys 420.5.2

NOV 1900

Substituted for a copy lost
(Minot fund.)

INTRODUCTION.

La définition vraie de la *température* découle des principes de la Thermodynamique. Mais, bien avant que les bases de cette science eussent été posées, les physiciens avaient adopté, dans un but d'unification, une échelle thermométrique normale, fondée sur la dilatation des gaz que l'on nommait *permanents*. Par une heureuse coïncidence, cette échelle empirique se trouvait être si voisine de l'échelle absolue ou thermodynamique, que la représentation matérielle la plus facilement réalisable de cette échelle concorde, aujourd'hui encore, dans les limites de la précision qu'il est possible d'atteindre, avec l'ancienne définition empirique; tout ce que la Métrologie moderne a pu faire jusqu'ici a été de préciser mieux les circonstances dans lesquelles le thermomètre à gaz doit être employé, c'est-à-dire le gaz qu'il faut adopter, et les limites de température entre lesquelles les indications déduites de sa dilatation ou des variations de sa tension peuvent être considérées comme suffisamment exactes.

C'est donc au thermomètre à gaz que l'on a recours en dernier ressort lorsqu'on veut déterminer, sans aucun intermédiaire, une température dans l'estimation de laquelle il n'y ait rien d'arbitraire que l'unité. Cependant la manipula-

tion d'un thermomètre à gaz est très compliquée dès que l'on veut atteindre une haute précision; tandis que la facilité avec laquelle se font les mesures au moyen du thermomètre à mercure a fait adopter son emploi dans la plupart des expériences de Thermométrie. Si cet emploi n'est pas tout à fait général, il faut en chercher la cause dans le fait que, pour donner une haute précision, il nécessite la connaissance exacte de quelques phénomènes, en apparence assez compliqués, qui peuvent fausser complètement les mesures si l'on n'en tient pas compte.

On a reconnu néanmoins que, contrairement à une opinion très répandue, il est aisé, non seulement de conserver un thermomètre à mercure invariable pendant un temps indéfini, mais encore de construire un nombre quelconque de thermomètres qui, étudiés individuellement, fournissent des indications identiques, dans les limites de la précision avec laquelle ils sont étudiés. Connaissant les écarts de l'un d'eux par rapport au thermomètre à gaz, les écarts de tous les autres seront également connus, de telle sorte que, par l'addition d'un terme correctif, les indications de chaque thermomètre sont ramenées à l'échelle normale.

Mais la mesure des températures par le thermomètre à mercure a des limites. D'une part, cet instrument ne convient qu'à l'intervalle dans lequel le mercure reste liquide; d'autre part, il existe, semble-t-il, un degré de sensibilité qu'il est impossible de dépasser, quelle que soit la forme donnée au thermomètre. Lorsque l'intervalle à mesurer décroît, le thermomètre à mercure devient relativement peu précis, et, pour un intervalle de l'ordre du millième de degré, son emploi est en quelque sorte illusoire.

Il y a peu d'années encore, on pensait que là s'arrêtait la possibilité d'effectuer une mesure de température; mais le développement prodigieux de la science électrique est venu ouvrir de nouvelles voies et fournir des instruments d'une merveilleuse sensibilité, qui, si l'on en croit l'estimation d'hommes compétents, reculeraient la limite des mesures jusqu'à des intervalles cent ou même mille fois plus petits. La description de ces instruments eût pu trouver place dans ce Traité. Deux raisons m'ont engagé à m'abstenir d'en parler autrement que d'une manière incidente. La première est que les méthodes électriques ne sont pas encore assez dégagées de la période d'élaboration pour qu'on puisse dire ce qui en restera et ce qui n'est que passager. La seconde est qu'elles auraient nécessité l'adjonction, à ce Traité, de plusieurs Chapitres n'ayant presque rien de commun avec le reste de l'Ouvrage, et qui en auraient détruit l'unité.

J'ai donc cru devoir me borner à une étude, aussi complète que possible, du thermomètre à mercure de précision, et de tous les phénomènes qui peuvent avoir une influence quelconque sur les mesures faites au moyen de cet instrument.

Le thermomètre à mercure n'est pas seulement un instrument de mesure dans le sens propre du mot; c'est-à-dire que son utilité comme moyen d'investigation n'est pas limitée à la mesure de la température du milieu ambiant. La recherche de ses particularités et de ses causes d'erreurs conduit à l'étude de divers phénomènes, tels que les déformations permanentes et résiduelles, et les modifications superficielles du verre. De cette manière, des données d'un haut intérêt scientifique découlent naturellement de l'étude

des thermomètres, comme résultats accessoires. Si l'on veut, dans un but théorique, pousser ces recherches au delà des limites que l'emploi du thermomètre exigerait, cet instrument est encore, dans bien des cas, l'appareil d'étude le plus commode et le plus précis. Enfin la théorie du thermomètre fournit, sur les dilatations, des relations numériques qu'aucune méthode directe n'aurait pu donner.

La part que le Bureau international des Poids et Mesures a prise aux recherches récentes sur le thermomètre à mercure est très considérable. La mesure des températures jouant un rôle important dans toutes les questions de Métrologie, il était nécessaire, avant d'entreprendre des expériences de haute précision, d'élaborer parfaitement les méthodes qui conviennent à l'étude des thermomètres et de déterminer les conditions les plus favorables à leur emploi. Les recherches entreprises, au Bureau international, par tous les observateurs qui se sont occupés de ces questions sont relatées, avec beaucoup de détails, dans les six premiers Volumes des *Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures*. Ces Mémoires marquent les diverses étapes dans les recherches, chacun d'eux s'appuyant sur les faits mentionnés dans les précédents. Une grande partie des résultats trouvés au commencement de ces études ont été dépassés; d'autres représentent encore l'état actuel de la question. Aujourd'hui, le sujet est épuisé dans ses traits importants; les méthodes sont à peu près fixées, et il ne reste plus à chercher que des faits particuliers, c'est-à-dire des détails de l'ensemble.

Pour composer ce Traité, j'ai utilisé, outre les travaux du

Bureau international, de nombreuses sources éparses dans diverses publications; je me suis efforcé d'acquérir sur chaque détail une opinion personnelle, de manière à pouvoir mettre en lumière les travaux de valeur, et à éliminer tout ce qui était sans importance. J'ai aussi complété, par de nouveaux calculs, certaines parties du sujet dont le développement était insuffisant. Enfin je me suis efforcé d'indiquer les points sur lesquels les recherches expérimentales font encore défaut.

Les questions de théorie pure, qui auraient nécessité de longs développements sans rien ajouter d'essentiel à la compréhension des méthodes, ont été laissées de côté; il en est de même des appareils classiques, décrits dans les Traités de Physique générale. Quant au thermomètre à mercure, on s'est strictement borné aux formes de cet instrument qui garantissent une haute précision. En revanche, certains appareils auxiliaires trop peu connus ont été décrits avec plus de détails que le titre et l'ordonnance de l'Ouvrage ne semblaient le permettre. Le tout a sans doute perdu un peu en harmonie; mais il m'a semblé que l'utilité de ce Traité en serait accrue.

Le Comité international des Poids et Mesures a bien voulu m'autoriser, pour la composition de ce Traité, à puiser sans limites dans les Travaux et Mémoires publiés sous ses auspices. Je saisis avec empressement cette occasion pour adresser ici au Comité international, et particulièrement à son Secrétaire, M. le Dr Ad. Hirsch, Directeur de l'observatoire de Neuchâtel, qui m'a toujours témoigné beaucoup de bienveillance, mes remercîments sincères; qu'il me soit

permis aussi d'exprimer toute ma gratitude à M. le Dr J.-R. Benoît, qui, avec une extrême amabilité, m'a fait profiter des leçons de sa grande expérience et m'a initié aux travaux de précision, dans lesquels il a acquis une réputation si justement méritée.

Je veux, en terminant, consacrer un pieux souvenir à la mémoire du Dr O.-J. Broch, l'homme excellent, l'infatigable savant, qui, après avoir dirigé pendant dix ans le Bureau international des Poids et Mesures, est mort au moment où l'œuvre de l'unification du système métrique allait être couronnée de succès.

CH.-ED. GUILLAUME.

Pavillon de Breteuil (Sèvres), juin 1889.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION V

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES. — LE BAROMÈTRE.

Préliminaires.

1. Corps thermométrique et enveloppe. — 2. Détermination des températures. — 3. Définitions fondamentales. — 4. Forme et classification des thermomètres. — 5. Observations. — 6. Imperfections de la tige et du réglage; rôle de la réfraction 1

Le baromètre.

7. Définitions. — 8. Conditions relatives à la construction. — 9. Différentes formes du baromètre. — 10. Lectures. — 11. Erreurs dues à la réfraction. — 12. Mesure de la distance des ménisques. — 13. Mesure de la température. — 14. Réductions. — 15. Corrections secondaires. — 16. Remplissage du baromètre. — 17. Baromètre de laboratoire 14

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES THERMOMÈTRES.

18. Éléments de l'étude 39

Division.

19. Tracé. — 20. Étude de la division 40

Calibrage.

21. Séparation d'une colonne. — 22. Appareil à calibrer et observations. — 23. — Théorie du calibrage. — 24. Équations de condition. — 25. Mé-

Pages.

thode de Gay-Lussac. — 26. Calibrage complet. — 27. Résolution par la méthode des moindres carrés. — 28. Erreurs résiduelles et erreurs probables des inconnues. — 29. Exemple. — 30. Résolution par la méthode Neumann-Thiesen. — 31. Erreurs résiduelles et erreurs probables. — 32. Exemple. — 33. Calibrage abrégé. — 34. Division en dix parties. — 35. Division en huit parties. — 36. Calibrage supplémentaire. — 37. Exemple. — 38. Seconde approximation. — 39. Synthèse du calibrage. Thermomètres étalons. — 40. Exemple de transformation. — 41. Thermomètres auxiliaires. — 42. Tables des corrections de calibre. — 43. Exemple d'interpolation.. 43

Coefficients de pression.

44. Théorie. — 45. Détermination de β_e. — 46. Calcul. — 47. Développements. — 48. Exemple. — 49. Calcul de l'épaisseur du réservoir. — 50. Tables des corrections de pression..... 99

Intervalle fondamental.

51. Ordre des expériences. — 52. Détermination du point 100. — 53. Détermination du zéro. — 54. Calcul de l'intervalle fondamental. Tables. — 55. Exemple. — 56. Correction d'une mesure de température..... 111

Comparaisons.

57. But et méthode. — 58. Appareils. — 59. Calcul des résultats. — 60. Exemple. — 61. Thermorégulateur..... 123

CHAPITRE III.

CAUSES D'ERREURS.

62. Diverses causes d'erreurs..... 133

Variabilité.

63. Relations entre les diverses variations. *Variations du zéro.* — 64. Lois générales. — 65. Théorie des résidus de dilatation. — 66. Hypothèses sur la cause des résidus de dilatation. — 67. Marche progressive et déplacements permanents. — 68. Relation entre la température et la position du zéro. — 69. Rapidité de la variation. — 70. Théorie des erreurs produites par le relèvement. — 71. Rôle des composants du verre. — 72. Conséquences pratiques des variations du zéro. *Variations de l'intervalle fondamental.* — 73. Variations produites aux températures peu élevées. — 74. Variations dues à l'effet des températures élevées. *Variations du calibre.* — 75. Observations faites sur les variations des corrections de calibre..... 133

Erreurs dues à la capillarité.

76. Phénomènes généraux. — 77. Calcul des pressions capillaires. — 78. Étude expérimentale du phénomène. — 79. Influence des dimensions du thermomètre. — 80. Élimination des erreurs..... 172

Défaut de sensibilité.

Pages.

81. Nature des phénomènes. — 82. Équations du problème. — 83. Détermination expérimentale de λ..... 184

Correction pour la colonne émergente.

84. Théorie. — 85. Calcul pratique de la correction..... 188

CHAPITRE IV.

SUR L'ÉCHELLE DU THERMOMÈTRE A MERCURE.

Théorie.

86. Définition d'une échelle thermométrique arbitraire. — 87. Diverses échelles d'un thermomètre à mercure. — 88. Théorie élémentaire du thermomètre à mercure. — 89. Rôle des résidus de dilatation..... 194

Expériences.

90. Discussion préliminaire. — 91. Comparaison entre des thermomètres du même verre. — 92. Comparaisons entre des thermomètres de verres différents. — 93. Conséquences relatives aux dilatations..... 206

CHAPITRE V.

SUR L'ÉCHELLE THERMOMÉTRIQUE NORMALE.

94. Échelle absolue et échelle normale. — 95. Réduction des indications des thermomètres à air et à acide carbonique à l'échelle absolue. — 96. Recherches modernes sur le thermomètre à gaz..... 223

Expériences de M. Chappuis.

Méthode et appareils. — 97. Méthode. — 98. Description des appareils. — 99. Constantes des instruments. — 100. Calcul des températures. — 101. Influence des erreurs d'expérience. — 102. Marche des expériences. *Thermomètre à azote.* — 103. Préparation et desséchement de l'azote; remplissage du réservoir. — 104. Exposé des mesures. — 105. Résultats. — 106. Représentation analytique des résultats. *Thermomètre à acide carbonique.* — 107. Modifications apportées aux appareils. — 108. Préparation du gaz et remplissage du réservoir. — 109. Exposé des mesures. *Thermomètre à hydrogène.* — 110. Préparation du gaz. — 111. Exposé des mesures.... 228

Synthèse et développements.

112. Comparaison des résultats relatifs aux thermomètres à azote, à acide carbonique et à hydrogène. — 113. Échelle normale. — 114. Écarts entre

Pages.

l'échelle normale et l'échelle absolue ou thermodynamique. — 115. Limite d'emploi du thermomètre à hydrogène. — 116. Conséquences relatives à la dilatation des gaz et des autres corps thermométriques. — 117. Comparaisons aux températures élevées. — 118. Mesure des températures très élevées. 257

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENTS ET APPLICATIONS.

Transformation des coefficients thermiques.

119. Recherche empirique des lois mathématiques. — 120. Passage d'une échelle thermométrique à une autre. — 121. Cas particuliers. — 122. Vérification. — 123. Exemple. — 124. Changement du système de températures. — 125. Dilatations cubiques. — 126. Compensation entre les coefficients..... 277

Détermination de la dilatation des corps solides.

Méthode du comparateur. — 127. Exposé de la méthode. — 128. Description du comparateur. — 129. Expériences. — 130. Réduction des observations. — 131. Calcul des coefficients de dilatation. — *Méthode de M. Fizeau.* — 132. Exposé de la méthode. — 133. Description des appareils. — 134. Expériences. — 135. Réductions et calcul. — 136. Exactitude atteinte dans les mesures de dilatation..... 294

NOTES.

I. Sur l'unité absolue de pression. — II. Sur la compressibilité du mercure et du verre. — III. Sur le verre normal allemand. — IV. Sur la résistance du verre à l'attaque de l'eau. — V. Sur la dilatation du mercure et du verre..... 317

TABLES.

I. Corrections pour la réduction à 0° des hauteurs barométriques observées sur une échelle en laiton. — II. Corrections pour la réduction à 0° des hauteurs barométriques observées sur une échelle en verre dur. — III. Valeurs du rapport $\frac{g_{\varphi}}{g_{45}}$. — IV. Dépression capillaire d'un ménisque de mercure. — V. Températures d'ébullition de l'eau pure sous différentes pressions. — VI. Dépressions du zéro dans les thermomètres en verre dur. — VII. Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en cristal dur pour les rapporter aux indications des thermomètres en verre dur. — VIII. Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en cristal français ordi-

Pages.

naire, pour les rapporter aux indications des thermomètres en verre dur. — IX. Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en verre dur pour les rapporter aux indications du thermomètre à azote. — X. Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en verre dur pour les rapporter aux indications du thermomètre à hydrogène. — XI. Formules pour la transformation des coefficients thermiques. — XII. Constantes diverses relatives à la thermométrie 323

PLANCHES.

Pl. I. — Thermomètre à gaz.

Pl. II. — Comparateur à dilatation (Plan).

Pl. III. — Comparateur à dilatation (Coupe).

Pl. IV. — Comparateur à dilatation (Détails).

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ PRATIQUE

DE LA

THERMOMÉTRIE

DE PRÉCISION.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES. — LE BAROMÈTRE.

PRÉLIMINAIRES.

1. **Corps thermométrique et enveloppe.** — Parmi les quelques liquides que l'on peut employer comme *corps thermométriques* (1), le mercure est, de beaucoup, celui qui remplit le mieux les conditions imposées par les thermomètres de précision. Sa faible dilatation rend, il est vrai, les variations de l'enveloppe très sensibles; mais, d'un autre côté, le grand intervalle de température dans lequel il reste liquide, la régularité de sa dilatation et la facilité avec laquelle on l'obtient dans un état de grande pureté sont autant de causes de supériorité sur les autres liquides

---

(1) *Voir* Isidore Pierre, *Recherches sur la Thermométrie et sur la dilatation des liquides.* Caen, 18-8.

en usage. Sa densité très élevée et le fait qu'il ne mouille pas le verre le rendent seul propre au calibrage des tubes étroits.

Le choix de l'enveloppe n'est pas aussi aisé. On rencontre, en effet, une grande difficulté dans la mesure des températures au moyen du thermomètre à mercure, par suite des anomalies que présente la dilatation du verre. Nous étudierons plus loin les lois de ces phénomènes; nous nous bornerons à indiquer sommairement ici en quoi ils consistent.

Une masse donnée de verre étant portée à une température supérieure ou inférieure à celle à laquelle elle a été précédemment exposée se dilate ou se contracte rapidement d'une certaine quantité; puis la variation de son volume se poursuit encore d'une manière appréciable, pendant un temps plus ou moins long, jusqu'à ce qu'un état stable soit atteint. On désigne cette propriété du verre (partagée par quelques autres corps, tels que le zinc et ses alliages, l'acier trempé, etc.), en disant qu'il possède des *résidus de dilatation*. Ces résidus se manifestent d'une manière frappante, surtout dans les variations du zéro des thermomètres [1], le volume du réservoir à la température de la glace fondante restant, pendant quelque temps, influencé par les variations qu'il a éprouvées. Lorsque le réservoir est resté dilaté par l'exposition à une température supérieure à 0°, on dit que le zéro du thermomètre est *déprimé;* le thermomètre étant soumis à la température de 0°, son zéro remonte, et, lorsqu'il est arrivé à une position stable, on dit qu'il est *relevé*. La *dépression* du zéro, pour une température t, est la différence entre sa position après que le thermomètre a été exposé à t° et la position qu'il atteint lorsque le thermomètre demeure, pendant un temps prolongé, à la température de la glace fondante.

Ces variations continuelles du zéro ont été pendant longtemps un obstacle à la détermination précise des températures; mais des recherches systématiques, entreprises depuis une quinzaine d'années, ont fait adopter un mode d'emploi des thermomètres par lequel on se libère presque entièrement de ces anomalies. Cependant les erreurs qui peuvent subsister dans l'évaluation des températures sont d'autant moindres que les résidus sont plus faibles.

---

[1] *Voir* Chapitre III.

Depuis quelques années, on s'est attaché, particulièrement en France et en Allemagne, à composer un verre possédant des résidus minimes. Les verres peu fusibles ont, à ce point de vue, de précieuses qualités; les résidus de dilatation y sont moindres que dans les verres facilement fusibles et disparaissent plus vite ([1]).

La propriété la plus importante des mouvements du zéro consiste en ce que, à une même température, les dépressions se produisent beaucoup plus rapidement que les relèvements; de plus, la rapidité des deux mouvements augmente en même temps que la température s'élève. Ainsi, lorsqu'un thermomètre en verre dur est porté de la température ordinaire à 100°, l'état stable est atteint après quelques minutes; dans le passage inverse, plus de la moitié du résidu subsiste encore après vingt-quatre heures, et l'état stable n'est atteint qu'après plusieurs semaines. Pour le cristal, le mouvement descendant du zéro à 100° peut être constaté pendant une heure environ; mais le relèvement dure des mois.

2. **Détermination des températures.** — Cette propriété est utilisée de la manière suivante pour la mesure des températures : le thermomètre ayant été exposé pendant quelque temps à la température à mesurer, on note son indication, puis on détermine rapidement la position de son zéro; celle-ci ne variant que très lentement, on observe, dans les premiers instants, la position du zéro correspondant à la température mesurée; cette température est alors comptée à partir du zéro observé; en d'autres termes, elle est donnée par la différence des deux lectures du thermomètre. Les températures, ainsi calculées, sont rapportées à l'intervalle fondamental [0·100], le point 100 étant calculé de la même manière que toutes les autres températures, à partir du zéro déterminé après.

3. **Définitions fondamentales.** — Nous nommerons *échelle thermométrique* donnée par un phénomène thermique une fonc-

([1]) Il semble qu'autrefois les thermomètres de précision étaient construits, pour la plupart, avec des verres peu fusibles. Dans l'introduction progressive du cristal en Thermométrie, on a tenu compte plutôt des facilités du travail et du bel aspect de ce corps que de ses propriétés thermiques.

tion linéaire de ce phénomène, et *système thermométrique,* ou *système de températures,* l'ensemble des données servant à définir l'intervalle fondamental et sa subdivision en degrés; nous aurons ainsi l'*échelle* des divers *thermomètres à gaz* et *à mercure,* et les *systèmes Réaumur, centigrade, Fahrenheit.*

Les points fondamentaux du système centigrade sont donnés par la température de fusion de la glace et la température d'ébullition de l'eau sous la pression de 760^{mm} de mercure, à 45° de latitude, à zéro et au niveau de la mer. L'intervalle fondamental est divisé en 100 parties égales.

L'échelle d'un thermomètre à mercure est fournie par la dilatation apparente du mercure dans le verre, rapportée à la centième partie du volume compris dans le tube capillaire, entre les points fondamentaux, ce volume étant exposé à la température à mesurer.

Cette définition est subordonnée aux trois hypothèses suivantes :

1° Les divisions de l'échelle correspondent à des capacités égales du tube capillaire.

2° Le réservoir n'éprouve aucune pression intérieure ou extérieure capable de modifier son volume primitif.

3° L'intervalle fondamental [0·100] correspond exactement à 100 degrés.

Dans aucun thermomètre, ces conditions ne sont rigoureusement remplies; l'étude des thermomètres consiste à déterminer les corrections au moyen desquelles toutes les mesures sont ramenées, aussi exactement que possible, à ces trois suppositions.

Les indications corrigées de chaque thermomètre sont alors identiques à celles d'un thermomètre parfait, soumis toujours aux mêmes pressions, et dont l'enveloppe suivrait exactement la même loi de dilatation que celle du thermomètre en question.

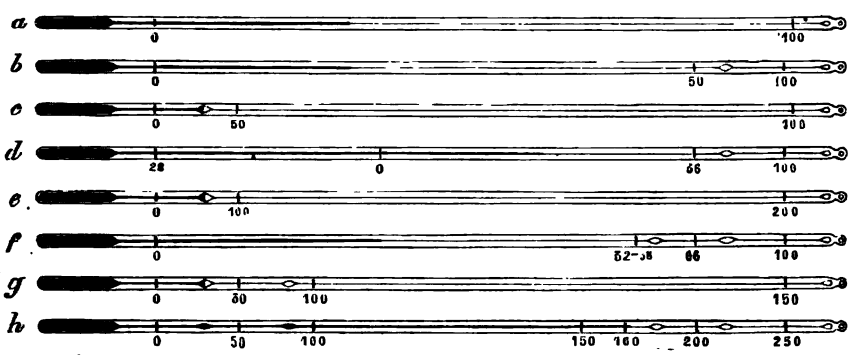
L'étude des thermomètres fera l'objet du Chapitre II.

Les températures, définies comme il vient d'être dit, forment une échelle continue, exacte par définition à 0° et à 100°, mais qui, aux autres températures, diffère, en général, de l'échelle théorique. La loi des divergences doit être déterminée pour chaque espèce de verre. Les Chapitres IV et V seront consacrés à ces recherches.

4. Forme et classification des thermomètres. — Les thermomètres destinés à être soumis à une étude individuelle doivent posséder les éléments exigés par cette étude, c'est-à-dire les points 0° et 100°, et les parties intermédiaires permettant de rapporter chaque section de l'échelle à l'intervalle [0·100] par une simple comparaison de volumes (calibrage). Nous nommerons *étalons* les thermomètres qui remplissent ces conditions (¹) et thermomètres *auxiliaires* tous ceux pour lesquels il est nécessaire de déterminer un ou plusieurs points par comparaison avec un thermomètre étalon.

Thermomètres étalons. — Les thermomètres étalons (*fig.* 1)

Fig. 1.



peuvent posséder soit une échelle continue entre 0° et 100° et au delà, soit une échelle coupée par une ou plusieurs ampoules soufflées sur le tube et destinées à remplacer une partie de l'échelle inutile dans les expériences qu'on se propose de faire. Cet artifice permet de raccourcir beaucoup certains thermomètres étalons.

Voici quelques modèles de thermomètres étalons :

1° Thermomètres avec toute l'échelle (*fig.* 1 *a*).

2° Thermomètres à une ampoule, avec échelle continue de 0° à 50° (*fig.* 1 *b*) ou de 50° à 100° (*fig.* 1 *c*), ou, pour basses températures, de — 28° à + 36° (*fig.* 1 *d*). Cette disposition permet de

(¹) C'est en effet la définition logique d'un étalon. Nous avons rejeté ici le mot *thermomètre normal,* qui a de trop nombreuses significations.

comparer entre eux les volumes [0·50], [50·100] ou [— 28·36], [36·100]. Enfin, thermomètres avec une ampoule entre 0° et 100°, et échelle continue de 100° à 200°, permettant de comparer les intervalles [0·100] et [100·200] (*fig.* 1 *e*).

3° Thermomètres à deux ampoules, avec échelle de — 2° à + 32° ou au delà, quelques degrés près de 66° et de 100° (*fig.* 1 *f*), disposés pour une division en trois parties, [— 2·32], [32·66], [66·100]; ou avec quelques points voisins de 50° et une section continue de 100° à 150° (*fig.* 1 *g*), dans lesquels l'intervalle [100·150] peut être comparé à [0·50] et [50·100], et ceux-ci à [0·100], etc.

3° Thermomètres divers, avec plus de deux ampoules, comme le thermomètre universel à quatre ampoules (Pernet) (*fig.* 1 *h*), à l'aide duquel, en chassant un volume convenable de mercure dans les ampoules supérieures, on peut mesurer toutes les températures de — 39° à 160°, rapportées au zéro, et de 160° à 260° comptées à partir de 100°.

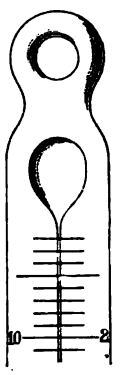
Thermomètres auxiliaires. — Dans la construction des thermomètres auxiliaires, on cherche à simplifier l'instrument, ou à le raccourcir, ou à allonger beaucoup le degré, pour permettre des lectures plus exactes. Les principaux thermomètres auxiliaires sont : les thermomètres *météorologiques,* qui possèdent une portion plus ou moins étendue de l'échelle voisine de zéro; les thermomètres dits *calorimétriques,* destinés à mesurer de petites différences de température et portant une courte fraction de l'échelle (10 ou 15 degrés), généralement séparée du zéro par une ampoule; enfin les thermomètres *hypsométriques,* dont la partie utile, voisine de 100°, sert à déterminer la hauteur barométrique par la température d'ébullition de l'eau.

Dans les deux premiers genres de thermomètres, la valeur du degré est déterminée par des comparaisons en un ou deux points, et les corrections des autres points par calibrage; on peut aussi déterminer toutes les corrections par des comparaisons. Dans les derniers, la valeur du degré est déterminée sur une partie auxiliaire voisine de zéro, et reportée, par calibrage, sur la partie supérieure.

Détails pratiques. — Les thermomètres de précision doivent

être d'une seule pièce, la tige étant, de préférence, cylindrique [1]. Le réservoir peut être soufflé sur la tige même; mais il est préférable de le prendre sur un tube de même verre, de dimensions convenables, et de le souder à la tige; on arrive ainsi plus facilement à lui donner l'épaisseur voulue. Le tube capillaire doit être cylindrique, car le mouvement du mercure se fait irrégulièrement dans les tubes aplatis, employés souvent pour les thermomètres de second ordre. Les tiges transparentes sont préférables aux tiges émaillées; en effet, dans de nombreuses expériences, les lectures peuvent être faites avec traits devant et traits derrière la colonne de mercure; on élimine ainsi les erreurs provenant des défauts de réglage. On remplace l'émail de la tige par un fond clair, en papier ou en verre blanc, éclairé par devant ou par derrière. Enfin, tous les thermomètres de bonne construction doivent porter, à leur extrémité supérieure, un petit réservoir en forme de poire (*fig.* 2),

Fig. 2.



bien raccordé au tube et pouvant contenir une colonne de mercure de 50 à 100 degrés. Les constructeurs obtiennent ces réservoirs

---

[1] On a essayé de roder, sur les tiges, une face plane pour le tracé; l'autre face est laissée cylindrique ou rodée de même et étamée. Certaines lectures sont ainsi facilitées; mais ces thermomètres sont très fragiles et ne supportent pas des températures élevées.

Pour diverses raisons, dont les principales sont la difficulté du calibrage, l'impossibilité de faire les lectures par devant et par derrière et enfin la lenteur avec laquelle la colonne prend la température, les thermomètres à chemise, dits *de forme allemande,* ne sauraient convenir aux expériences de haute précision.

en faisant agir, à l'intérieur, la pression des vapeurs mercurielles. Les ampoules intermédiaires sont produites par la pression de l'air chaud.

5. **Observations.** — Le facteur principal de la précision des mesures à l'aide du thermomètre à mercure réside dans l'exactitude avec laquelle l'observateur détermine la position relative de l'extrémité de la colonne mercurielle et des traits voisins. On se sert, pour ces observations, d'une loupe ou d'une lunette, munie ou non d'un micromètre.

Les observations à la loupe présentent des inconvénients : le champ visuel est trop large et la direction des rayons n'est pas suffisamment fixée; on n'obtient, en outre, un grossissement assez fort qu'en s'approchant beaucoup du thermomètre; cette pratique est presque toujours gênante et souvent impossible.

Il n'en est pas de même des observations à la lunette. La direction des rayons peut être bien déterminée et le champ visuel limité à volonté. Le grossissement est arbitraire à toute distance du thermomètre; sa limite supérieure n'est imposée que par la nécessité de voir distinctement à la fois les traits et la colonne. On emploie avantageusement, pour ces observations, de petites lunettes de 15 à 20^{cm} de longueur, grossissant 10 à 12 fois à une distance de 30 à 50^{cm}. Dans certaines observations, on peut s'approcher davantage et opérer avec un grossissement plus fort. A défaut de micromètre, un fil d'araignée, placé devant l'oculaire et amené par l'observateur à la distance de la vue distincte, marque le milieu du champ. Ce fil aide à estimer les fractions de division; la bissection étant relativement facile, on partage, à l'aide du fil, un intervalle en deux parties, ce qui facilite la lecture.

La lunette doit être réglée perpendiculairement au thermomètre; pour cela, divers procédés sont en usage, suivant la nature des observations et les moyens dont on dispose. Lorsque le thermomètre est vertical, on rectifie sa position au moyen d'un fil à plomb; la position de la lunette est alors déterminée à l'aide d'un niveau. Dans la position horizontale du thermomètre, on peut régler la lunette soit par un fil à plomb (deux traits à angle droit, pratiqués le long de la monture, marquant la position de l'axe), soit en appliquant un niveau sur la monture de l'oculaire et en

faisant tourner la lunette dans son support; on reconnaît qu'elle est verticale si la bulle reste immobile.

Lorsque le thermomètre ou la lunette doivent être placés dans des positions obliques, ces procédés sont inapplicables; on se sert alors des suivants, qui sont aussi employés fréquemment dans les cas mentionnés ci-dessus.

On applique contre le thermomètre un petit miroir dans lequel on observe, avec la lunette, l'image de l'objectif; celle-ci doit être concentrique avec le champ visuel, qu'elle remplit en partie; le réglage terminé, on remet la lunette au point sur le thermomètre.

Enfin, lorsque le thermomètre est transparent et que sa position est fixée par deux points, on peut lire son indication (supposée constante) avec traits devant et traits derrière la colonne, et modifier sa position ou celle de la lunette jusqu'à ce que les lectures concordent. Ce procédé, qui paraît à première vue assez primitif, conduit rapidement, dans certains cas, à un bon réglage, lorsque l'observateur a une pratique suffisante des lectures.

La lecture de la position du ménisque étant rapportée aux traits voisins, l'interpolation peut être faite *à l'estime* ou au micromètre. Dans tous les cas où la température n'est pas parfaitement constante, la lecture à l'estime est préférable; mais elle l'est encore souvent lors même que le ménisque est immobile. Les lectures au micromètre occasionnent un travail d'observation et de réduction très considérable, et, lorsque cela est possible, il est généralement préférable d'employer le même temps à répéter l'expérience dans d'autres conditions. Un observateur habile, opérant avec une division fixe et un bon éclairage, arrive à ne commettre que rarement des erreurs dépassant deux centièmes d'un intervalle.

Dans la suite, nous indiquerons, dans chaque cas, quel est le mode de lecture que l'expérience a enseigné comme le meilleur.

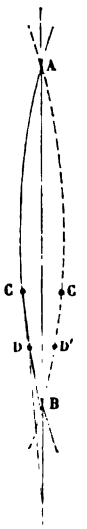
6. Imperfections de la tige et du réglage; rôle de la réfraction. — On suppose, en général, que la forme extérieure de la tige d'un thermomètre est celle d'un cylindre droit, à base sensiblement circulaire; lorsque cette condition n'est pas suffisamment remplie, il en résulte un genre particulier d'erreurs qu'il est difficile de déterminer séparément, mais dont l'étude rentre

en partie dans un autre groupe de recherches. Certaines d'entre elles peuvent cependant échapper à l'étude, et il convient de se rendre compte, *a priori*, des limites de perfection désirables pour la forme extérieure d'un thermomètre.

Le cas général d'une tige de forme quelconque est sans intérêt; nous nous occuperons de la tige courbée à section constante et de la tige conique.

Tige courbée. — Considérons (*fig.* 3) un thermomètre faible-

Fig. 3.

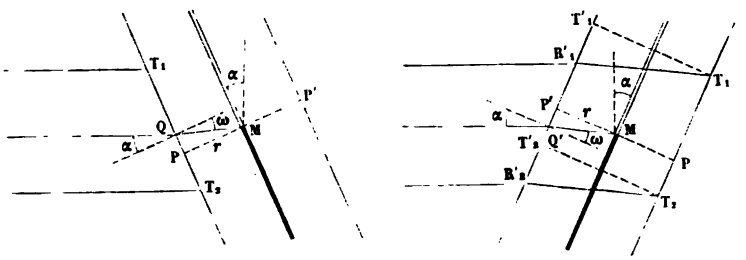


ment courbé, s'appuyant en deux points A et B de la même verticale. Supposons, pour fixer les idées, que les traits soient situés sur la partie convexe de la tige, et la lunette horizontale à gauche de la figure. L'extrémité de la colonne sera en C; après le retournement, le thermomètre prendra une position symétrique par rapport à la droite AB, et les lectures se feront en C'. L'axe du tube forme, en ce point, un angle α avec AB.

Considérons (*fig.* 4) une portion très petite du tube, supposée rectiligne entre deux traits consécutifs T_1 et T_2. La position du ménisque M par rapport aux traits voisins est supposée mesurée

à partir du pied P de la perpendiculaire à l'axe du tube menée par M; en réalité, elle est donnée par les distances relatives des

a. Fig. 1. *b.*



trois rayons horizontaux partant de M, T_1 et T_2, et reçus dans la lunette. L'erreur sera donc QP ou Q'P'.

Soient $2r$ le diamètre du tube; ω l'angle du rayon MQ ou MQ' avec la normale à l'axe du tube. Le rayon émergent forme, avec cette normale, l'angle α. Or on peut écrire, avec une approximation suffisante (¹),

$$\frac{\alpha}{\omega} = n$$

et

$$PQ = P'Q', \qquad r\omega = \frac{r\alpha}{n}.$$

Dans le cas supposé ici, le ménisque est donc déplacé de la quantité $r\frac{\alpha}{n}$, vers le haut, lorsque la partie convexe est tournée du côté de l'observateur; vers le bas dans le cas contraire. Lorsque des traits sont vus à travers le thermomètre, ils apparaissent en R'_1 et R'_2, tandis qu'ils devraient se projeter normalement au tube en T'_1 et T'_2; ils sont abaissés de

$$T'_1R'_1 = T'_2R'_2 = \frac{2r\alpha}{n}.$$

Il en résulte un déplacement apparent du ménisque égal à $\frac{r\alpha}{n}$ et dirigé vers le haut. L'erreur est donc exactement la même

(¹) Nous supposons que n soit l'indice de réfraction du verre rapporté au vide ou, avec une approximation suffisante, à l'air. Lorsque le thermomètre est plongé dans un liquide, il faut remplacer n par le rapport des indices.

dans les deux positions du thermomètre; elle est diminuée par la réfraction dans le rapport $1 : n$.

Soit, par exemple, $r = 2^{mm}$, $AB = 300^{mm}$; supposons que, pour cette distance, la flèche soit de 1^{mm}, le tube étant courbé en arc de cercle. En A et B, $\alpha = \frac{1}{75}$; pour $n = 1,5$, l'erreur sera, en ces points :

$$\varepsilon = 0^{mm},018.$$

Si le degré a une longueur de 5^{mm}, l'erreur commise sur la lecture sera de 0,0036 degré.

Si nous supposons le point A fixe, le point B mobile dans la verticale, l'angle α en chaque point varie avec la position de B. L'erreur d'une lecture varie donc avec la position des appuis. Mais la différence entre les angles α_1 et α_2 que forment avec la verticale les tangentes à l'axe du thermomètre en deux points C et D reste constante. L'erreur relative commise sur la mesure de la distance CD est

$$\frac{r(\alpha_1 - \alpha_2)}{n}.$$

C'est une quantité constante, quelle que soit la position des appuis A et B, pourvu qu'ils restent invariables pendant la mesure de l'intervalle CD. Or nous savons (2) qu'une mesure de température consiste dans la détermination d'une différence de deux lectures, l'une d'elles étant, en général, le zéro actuel du thermomètre. Si donc on détermine l'erreur de courbure de chaque point par rapport au zéro, le thermomètre restant pendant toute la détermination sur le même support, la correction trouvée conviendra encore aux lectures du thermomètre maintenu en deux points quelconques d'une ligne perpendiculaire à la lunette. Nous verrons, dans le deuxième Chapitre, que cette erreur rentre dans le groupe déterminé par l'opération complexe du calibrage. Elle serait donc complètement éliminée des résultats si le thermomètre était supporté aux mêmes points dans la lecture de la température cherchée et dans la détermination du zéro. Lorsque cette condition n'est pas remplie, l'erreur n'est éliminée que partiellement. Il en est de même lorsque le thermomètre est plongé dans un liquide; l'erreur provenant de la forme du thermomètre n'est plus alors modifiée par la réfraction dans la même proportion que lors

de sa détermination. Puisque l'erreur en question n'est pas toujours éliminée complètement, il faut chercher à l'éviter, en rectifiant suffisamment les tiges des thermomètres. Les constructeurs y arrivent en chauffant la tige successivement en quelques points, et en alignant un tronçon après l'autre. Cette opération a malheureusement pour effet de modifier quelquefois le diamètre du tube et d'introduire des irrégularités dans les corrections de calibre.

Tige conique. — Considérons, en second lieu, une tige dont le tube intérieur soit rectiligne, mais dont les génératrices, en un point donné, soient diversement inclinées sur l'axe. Supposons, pour fixer les idées, que des génératrices opposées coupent l'axe du tube vers le bas, sous des angles α et β. Du côté des traits, le déplacement du rayon par rapport à la perpendiculaire à l'axe du tube est, d'après la notation précédente,

$$QP = r\,\widehat{QMP} = r(\alpha - \omega) = r\alpha\,\frac{n-1}{n}.$$

Lorsque les traits sont vus à travers la tige, leur déplacement apparent est

$$2r\beta\,\frac{n-1}{n},$$

le déplacement du ménisque étant moitié moindre, la lecture sera modifiée de $r\beta\,\frac{n-1}{n}$.

Dans le premier cas, le ménisque est abaissé; dans le second, il est élevé. La moyenne des erreurs, dans le sens d'un abaissement, est

$$r(\alpha - \beta)\,\frac{n-1}{2n}.$$

Au point de vue de l'élimination de cette erreur, il faut distinguer plusieurs cas. Le calibrage et les lectures peuvent être faits dans la même position du thermomètre, ou dans les deux positions; l'erreur est alors complètement éliminée. Le calibrage peut être fait dans une position, par exemple avec traits derrière, la lecture dans les deux positions; l'erreur est, dans ce cas,

$$r\alpha\,\frac{n-1}{n} - r(\alpha - \beta)\,\frac{n-1}{2n} = r(\alpha + \beta)\,\frac{n-1}{2n},$$

ou enfin le calibrage est fait dans une position, la lecture dans l'autre; l'erreur devient

$$r(\alpha+\beta)\frac{n-1}{n}.$$

L'erreur est maxima dans ce dernier cas.

Soit, pour le point considéré, $r = 2^{mm}$, et supposons par extraordinaire que, sur une longueur de 100^{mm}, le diamètre augmente de 1^{mm},

$$\alpha+\beta = 0{,}01, \qquad \varepsilon = 0^{mm},007.$$

Si la longueur du degré est de 5^{mm}, l'erreur est de 0,0014 degré.

Il n'y a aucune difficulté à trouver des tiges de verre pour lesquelles cette erreur soit moindre et devienne, par conséquent, insignifiante.

Réglage. — Soit enfin un thermomètre dont la tige est parfaitement cylindrique, mais qui, dans les observations, forme un angle α avec la perpendiculaire à la ligne de visée. D'après la *fig.* 4, l'erreur de l'observation est, pour les deux positions, $r\frac{\alpha}{n}$; elle est positive dans une position, négative dans l'autre; elle est donc éliminée, si les observations sont faites avec traits devant et traits derrière. Lorsqu'elles sont faites dans une seule position, l'erreur est diminuée par la réfraction.

LE BAROMÈTRE.

Le baromètre est un auxiliaire indispensable des recherches thermométriques. Nous décrirons les diverses formes de cet instrument, et nous étudierons ses causes d'erreurs.

7. **Définitions.** — La pression atmosphérique est mesurée, au moyen du baromètre, par la hauteur de la colonne de mercure qui lui fait équilibre.

Soient

h cette hauteur;
d la densité du mercure;
f un ensemble de forces étrangères que nous définirons dans la suite.

La pression p par unité de surface sera

$$p = h\,dg + f,$$

g étant l'accélération de la pesanteur.

La pression sera connue lorsqu'on aura mesuré la hauteur du mercure dans le baromètre, calculé sa densité d'après sa température, et que l'on connaîtra l'intensité de la pesanteur au lieu de l'observation, ainsi que les forces groupées dans le symbole f.

Cependant, la question se présente, dans la pratique, sous une forme un peu différente. Il est rare que la connaissance exacte d'une pression en valeur absolue soit nécessaire; il s'agit, dans la plupart des cas, de comparer les pressions entre elles, en partant d'une unité arbitraire, le millimètre de pression, ou l'*atmosphère*, pression qu'exerce sur l'unité de surface de sa base une colonne de mercure de 760^{mm} de hauteur, placée dans des conditions bien définies. Les pressions sont exprimées en hauteurs de mercure dans les mêmes conditions; il suffira donc, pour connaître la pression exprimée dans les unités usuelles, de mesurer h, et de réduire d et g à des valeurs normales, dans l'adoption desquelles entre une certaine part d'arbitraire (1).

Les forces f seront aussi exprimées en hauteurs de mercure: nous pourrons soit les éliminer, soit les introduire dans la formule comme terme correctif.

Désignons par H la hauteur barométrique corrigée; soient Δh, Δd, Δg un ensemble de corrections appliquées respectivement à

---

(1) L'unité absolue C.G.S de pression est la dyne par centimètre carré, à laquelle on substitue fréquemment la mégadyne par centimètre carré, voisine de l'atmosphère ($0^{atm},987$).

Dans la formule ci-dessus, p est exprimé en unités absolues si h, d, g et f sont donnés en unités absolues.

Suivant l'idée des fondateurs du système métrique, l'unité de densité devait être la densité de l'eau dans les conditions normales; le kilogramme était dès lors une unité dérivée. D'après les définitions modernes, l'unité absolue de masse est déduite du kilogramme, et la densité de l'eau est une quantité dérivée qui diffère de l'unité de l'erreur commise dans la construction du kilogramme. Cette erreur n'a pas encore été déterminée avec précision; il se peut qu'elle atteigne un dix-millième.

[*Voir* O.-J. Broch, *Note sur la détermination, par M. Lefèvre-Gineau, du poids du décimètre cube d'eau*, etc. (*Procès-verbaux de la Commission internationale du Mètre*, 1874; Annexe IV)].

h, d et g; φ la quantité f dans les nouvelles unités. La formule deviendra

$$H = (h + \Delta h)\left(1 + \frac{\Delta d}{d_n}\right)\left(1 + \frac{\Delta g}{g_n}\right) + \varphi,$$

d_n et g_n étant les valeurs normales de d et g.

Après avoir établi quelques principes généraux, nous nous occuperons des différents termes de cette formule.

Définissons encore le terme φ. Les principales forces secondaires agissant sur le mercure sont : la capillarité, la pression de l'air dans la chambre fermée du baromètre, la tension des vapeurs mercurielles, la pression du mercure sur lui-même, et les forces électriques.

8. Conditions relatives à la construction. — Dans un baromètre de précision, la distance des ménisques est mesurée, d'ordinaire, à l'aide d'un cathétomètre avec deux lunettes à micromètre oculaire. Si parfait que soit un cathétomètre, il éprouve toujours de petits déplacements dans le sens vertical, ou de faibles inclinaisons, lorsqu'on le fait pivoter sur son axe. Il faut donc pouvoir éliminer ou déterminer les erreurs provenant de ces défauts de construction. La détermination des erreurs, et surtout l'application des corrections qui en résultent, est un travail fastidieux, qui, même fait avec soin, introduit un élément d'incertitude dans le résultat. Il est donc désirable de s'en dispenser autant que cela est possible; on y arrive en plaçant les deux branches du baromètre dans la même verticale.

La hauteur mesurée par le cathétomètre doit être ensuite exprimée dans les unités usuelles. Le procédé le plus précis consiste à amener dans le champ des lunettes une règle divisée, par rapport à laquelle on détermine la position des fils des micromètres. Tous les autres moyens de déterminer la distance observée dans les lunettes sont imparfaits.

Les forces capillaires qui s'exercent entre le mercure et le verre jouent, dans ces mesures, un rôle important. Les ménisques étant déprimés, dans les tubes étroits, d'une quantité qui dépend de la manière dont ils se sont formés, il est nécessaire que la surface du mercure s'étale dans des tubes larges (20^{mm}-30^{mm}); ou, à défaut, que les portions de tubes dans lesquelles on observe soient de

même diamètre, et que les ménisques s'y établissent dans des conditions semblables. La position du centre, dans les ménisques larges, ne dépend pas de la manière dont ils se sont établis; mais il arrive souvent que les ménisques descendants sont creux, et que le milieu ne peut être observé dans la direction horizontale. Il faut donc, dans tous les baromètres, pouvoir rendre les deux ménisques simultanément ascendants ([1]).

On ne peut déterminer la tension de l'air dans la chambre fermée du baromètre qu'en faisant varier dans de larges limites sa capacité; le dispositif servant à déplacer les ménisques doit, par conséquent, posséder une course imposée par l'amplitude nécessaire de ces variations.

Enfin, la température constitue un élément important du calcul de la hauteur mesurée au cathétomètre et de la densité du mercure. Un baromètre doit donc être accompagné d'un nombre suffisant de thermomètres.

9. **Différentes formes du baromètre.** — Divers dispositifs ont été imaginés pour satisfaire aux conditions qui viennent d'être énumérées; nous décrirons les principaux.

Baromètre à piston plongeur. — Un baromètre à siphon (*fig.* 5) dont les tubes extrêmes sont alignés dans une même verticale porte une branche latérale reliée, par un tube de caoutchouc ([2]) ou par une pièce d'acier mastiquée, à un réservoir dans lequel plonge un piston de verre ([3]) fixé à une crémaillère commandée par un pignon. En abaissant le piston, on élève le mercure simultanément dans les deux branches. Le tube latéral porte un étranglement *a* destiné à ralentir l'entrée du mercure dans le baromètre; les oscillations deviennent ainsi presque apériodiques.

Baromètre à tube mobile. — Le tube barométrique (*fig.* 6),

([1]) Cette condition a été indiquée pour la première fois, croyons-nous, par F.-G.-W. Struve (*Description de l'observatoire astronomique central de Pulkowa*, p. 225; 1845). Le baromètre de Pulkowa, construit par Girgensohn, est combiné avec une entente remarquable de la question.

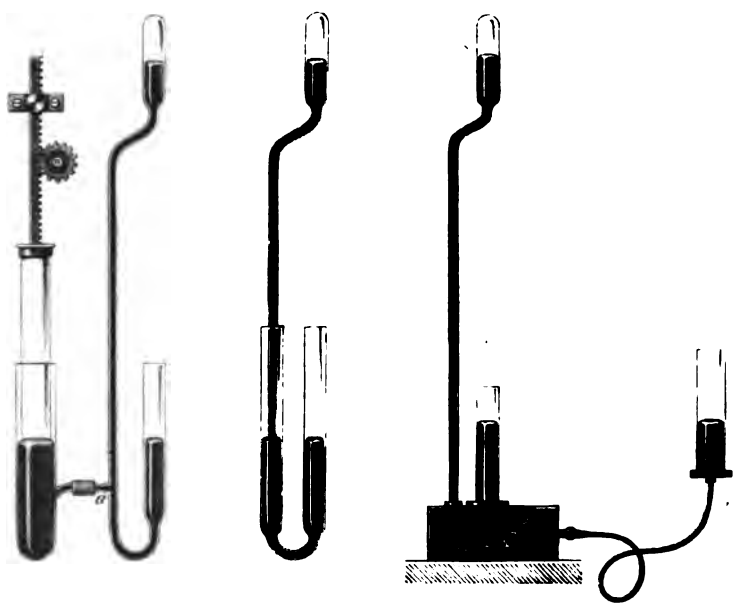
([2]) Le baromètre ne peut pas être fait d'une seule pièce, à cause des difficultés du remplissage.

([3]) Cet artifice, très analogue à celui de Girgensohn, a été indiqué par M. Amagat (*Archives de Genève*, t. XXXV; 1869).

porté par un chariot vertical mû par une vis, plonge dans un tube fixe en U formant cuvette; il peut être déplacé verticalement d'un mouvement rapide ou micrométrique. Le tube du baromètre est recourbé de façon que la chambre soit dans la même verticale que la branche ouverte. On établit le niveau dans la branche fermée en abaissant le tube du baromètre; le mercure remonte en même temps dans la branche ouverte.

Baromètre à réservoir auxiliaire (*fig.* 7). — Le tube est fixé, par une boîte à cuir, dans un bloc d'acier percé d'un canal qui établit la communication avec la branche ouverte, également fixée par un joint et mastiquée dans le bloc. Un tube flexible, en acier, muni d'un robinet, établit la communication avec un réservoir auxiliaire contenant du mercure et porté sur un chariot qui peut être déplacé le long d'une glissière. En élevant ce réservoir, on fait monter le mercure dans les deux branches.

Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.



10. Lectures. — Les lectures du baromètre se font, comme il a été dit, au moyen de deux lunettes munies d'un micromètre et portant des niveaux.

Les ménisques étroits (10^{mm}-15^{mm}) peuvent être pointés simplement en amenant le fil horizontal du réticule à être tangent à l'image du ménisque dans la lunette. Mais ce procédé n'est pas applicable aux ménisques larges; il est nécessaire de considérer ceux-ci comme des miroirs plans, et de déterminer leur position en pointant le milieu entre un objet et son image donnée par le ménisque. On emploie souvent, pour cela, des pointes fines en verre noir (Pernet), qui, dans les observations, sont à une très petite distance du ménisque. Dans la branche fermée du baromètre, les pointes sont soudées aux parois et recourbées à angle droit (*fig.* 8) dans l'axe du tube. Dans la branche ouverte, on

Fig. 8.

fixe sur le tube une armature soutenant une tige d'acier à laquelle est mastiquée la pointe de verre; la tige est serrée par une vis et peut être commandée par un mouvement micrométrique. Les pointes permettent des mesures très précises.

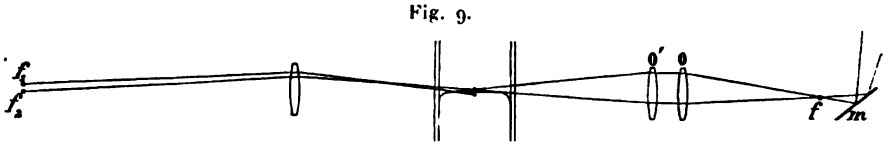
Dans les deux cas précédents, on éclaire le ménisque au moyen d'un petit miroir renvoyant horizontalement dans la lunette la lumière diffuse d'une fenêtre ou d'une surface éclairée. Le ménisque est limité par un écran fixe, fendu verticalement, et un écran mobile interceptant la lumière à une petite distance du mercure [1].

---

[1] Le baromètre de Pulkowa est porté en entier sur un axe et peut être orienté de façon à s'adapter au meilleur éclairage.

Un autre procédé très ingénieux, imaginé par M. Marek (*fig.* 9) (¹), consiste à produire, au-dessus du centre du mé-

Fig. 9.



nisque, l'image réelle d'un fil f, projetée par un collimateur OO' placé derrière le baromètre. Cette image, qui remplace la pointe, permet aussi de bonnes mesures. Le pointé se fait entre f_1 et f_2. Ce procédé nécessite malheureusement un réglage assez délicat.

Enfin M. Thiesen (²) a proposé de placer derrière le baromètre une règle divisée permettant de pointer directement sur un trait et son image dans le mercure. Afin qu'il ne puisse pas se produire d'équivoque sur la position du ménisque, dans le cas où il se trouve très près du milieu d'un intervalle (les traits et leurs images forment alors une échelle équidistante non interrompue), M. Thiesen marque, au-dessous de chaque trait, un point qui se trouve au-dessus dans l'image. La règle est éclairée par devant. Ce procédé élimine les erreurs du cathétomètre.

11. Erreurs dues à la réfraction. — Les erreurs de réfraction peuvent provenir soit de ce que les rayons lumineux reçus dans la lunette traversent obliquement une surface parallèle et éprouvent un déplacement parallèle, soit de ce qu'ils se trouvent déviés par des surfaces inclinées. Il est aisé de se convaincre que le premier phénomène ne produit aucune erreur sensible dans un baromètre bien construit. Il n'en est pas de même du second, que nous allons étudier. Deux cas se présentent, suivant que l'on vise le centre du ménisque et que l'on reporte sur une règle la hauteur mesurée dans le cathétomètre, ou que l'on pointe directement une règle placée derrière le baromètre.

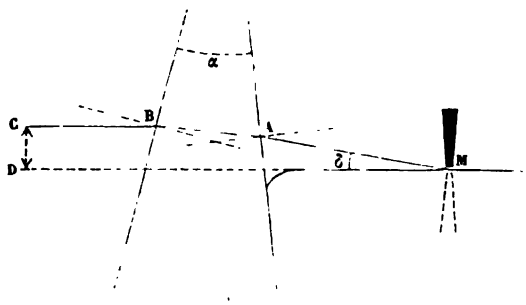
Premier cas. — On reçoit dans la lunette un rayon MABC

(¹) W.-J. Marek, *Pesées* (*Travaux et Mémoires*, t. III, p. D.38; 1884.)

(²) Max Thiesen, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, t. VI, p. 89; 1886.

(*fig.* 10), qui, après avoir traversé la paroi antérieure du baro-

Fig. 10.



mètre, émerge horizontalement. L'erreur CD est facile à calculer approximativement.

Soient

r le rayon moyen du tube;
α l'angle au sommet du prisme;
δ l'angle de déviation.

En remplaçant les sinus et les tangentes par les angles, on trouve

$$\delta = (n-1)\alpha,$$

$$CD = r\delta = r(n-1)\alpha$$

ou, pour $n = 1,5$,

$$CD = 0,5\,r\alpha.$$

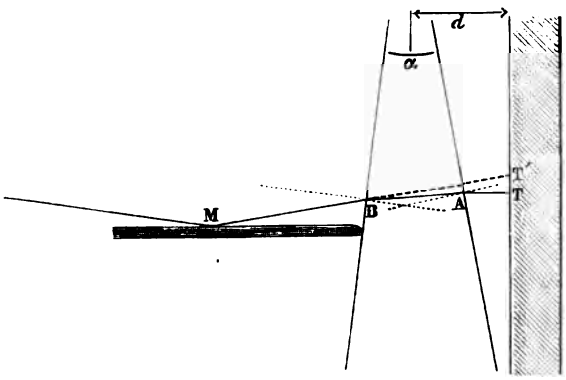
Soit $r = 15^{mm}$; si, par exemple, l'épaisseur de la paroi antérieure augmente de $0^{mm},1$ sur une longueur de 100^{mm}, on aura

$$\alpha = 0,001 \qquad \text{et} \qquad CD = 0^{mm},0075.$$

Second cas. — Les rayons provenant directement de la règle et les rayons préalablement réfléchis sur le ménisque traversent la paroi antérieure du baromètre en des points très voisins; ils subissent donc sensiblement la même déviation, et l'image du ménisque n'est pas déplacée par rapport aux rayons, qui, après avoir traversé la paroi postérieure, passent très près du ménisque, dans une direction à peu près horizontale. Il suffit donc de connaître la déviation qu'éprouvent, en traversant la paroi postérieure, les

rayons partant du trait T (*fig.* 11), situé immédiatement au-dessus du mercure. Un rayon partant de T suivra le chemin TABM pour se réfléchir en M; il semblera venir de T, et le déplacement se

Fig. 11.



calculera, comme dans le cas précédent, en remplaçant r par la distance d, généralement plus faible, comprise entre la règle et le milieu de la paroi du baromètre.

Nous avons vu que des erreurs sensibles se produisent, dans le premier cas surtout, avec des tubes assez réguliers. Pour les éviter, on a essayé fréquemment de roder sur le tube une surface plane ou cylindrique pour laquelle ces erreurs seraient négligeables; mais alors le verre ne supporte pas une température élevée, et le baromètre se casse d'ordinaire pendant le remplissage.

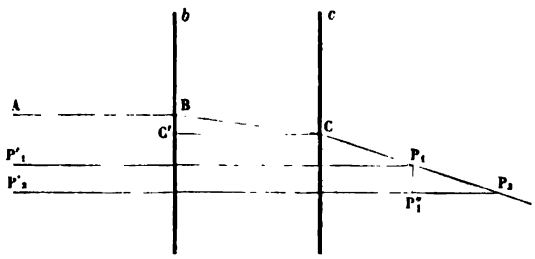
Détermination des erreurs. — Lorsque le tube est à la disposition de l'observateur avant d'être fermé, on peut mesurer le déplacement des images, qui se produit par l'interposition d'une des parois du tube.

On peut aussi déterminer l'erreur de réfraction sur un baromètre monté.

Considérons (*fig.* 12) un tube large bc, à travers lequel on vise un point P_1 au moyen d'une lunette horizontale. Le rayon qui, parti de P_1, aura, après deux réfractions, la direction horizontale, suivra, par exemple, le chemin P_1CBA (en négligeant l'épaisseur des parois). Le déplacement sera donné par la distance des lignes AB et P'_1P_1. L'image d'un second point P_2, situé sur le même

rayon, subira le déplacement AP'_2. La différence $P_1P'_1$ des deux déplacements, divisée par la distance horizontale P'_1P_2, donnera l'inclinaison de la ligne P_1P_2 et, par conséquent, la position du

Fig. 12.



point C. On en déduira la réfraction produite par la paroi *c*, et par suite le déplacement BC', engendré par le passage du rayon à travers la paroi *b*. On aura ainsi déterminé, du même coup, par deux observations, la réfraction des deux parois.

On augmente la précision de la mesure en multipliant les observations sur des points P_1, P_2, P_3, ..., qui, du reste, peuvent n'être pas situés rigoureusement sur le même rayon.

Pour mesurer le déplacement, on substitue aux points P_1, P_2, ... des droites horizontales, dont ces points sont les projections dans la figure; on vise alors ces droites aux deux bouts à côté du tube, et dans le milieu à travers le tube. On peut aussi employer, pour cela, une surface de mercure. La mise au point s'obtient en visant la surface à des distances diverses, ou en compensant la distance par des glaces dont on a vérifié la planéité.

L'expérience montre que les défauts sont souvent locaux et qu'il faudrait d'ordinaire déterminer les erreurs, dans une des branches, pour une série de points; car les seuls baromètres pour lesquels les lectures peuvent toujours être faites dans les deux branches, aux mêmes points, sont ceux qui ont à la fois un tube mobile et un réservoir auxiliaire.

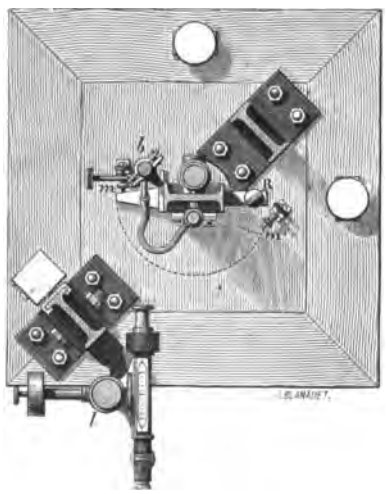
On préfère cependant, en général, choisir avec soin les tubes qu'on emploie et négliger ces erreurs.

12 **Mesure de la distance des ménisques.** — Lorsque le

procédé de lecture imaginé par M. Thiesen ne peut pas être employé, la position des ménisques, ayant été relevée dans deux lunettes parallèles, doit être reportée sur une règle. Pour cela, deux procédés sont en usage.

Première construction. — Le baromètre est supporté par une colonne verticale mobile autour de son axe. Du côté opposé au tube barométrique *b* (*fig.* 13), la colonne porte une règle divisée R, suspendue verticalement par son extrémité supérieure, ou par un autre point, et guidée (non serrée) dans le bas. Cette règle est amenée par une rotation de la colonne dans le champ des microscopes; la position des fils qui ont servi à viser les ménisques est déterminée, par le procédé ordinaire, en mesurant, à l'aide de la vis micrométrique, leur distance aux traits voisins.

Fig. 13.



La colonne peut être suspendue comme celle d'un cathétomètre, à une forte tige d'acier fixée à un trépied; elle est alors guidée par un cône qui s'emboîte dans une ouverture de même forme pratiquée dans le pied de l'appareil. Elle peut aussi être portée par deux équerres boulonnées sur un pilier de pierre, ou enfin, par un cadre en fonte, maintenu sur une forte planche avec vis calantes (*fig.* 13). Dans tous les cas, elle doit porter des organes de règlage.

Le mouvement de la colonne est limité par deux butoirs m, m' avec vis de rappel, réglés de façon que, aux extrémités de la course, l'axe des tubes b et la règle R soient au point dans les lunettes.

Dans ce dispositif, il suffit que les lunettes, calées sur de fortes tiges verticales l, possèdent une course de quelques centimètres.

Ce procédé, le meilleur en théorie, est difficilement applicable à des baromètres lourds, et compliqués, comme cela arrive souvent, d'un manomètre ou autres accessoires.

Seconde construction. — Le baromètre et la règle divisée sont fixes; les lunettes sont calées sur une colonne verticale en acier, mobile autour de son axe, et supportée comme l'était dans le premier cas le baromètre. La distance mesurée par les micromètres est reportée sur la règle par une rotation convenable de la colonne. Le long de celle-ci règne un sillon quadrangulaire, suivant une génératrice, servant de guide pour le déplacement vertical des microscopes; l'un d'entre eux doit porter un mouvement micrométrique de réglage en azimut, tout l'appareil étant rarement exécuté avec une perfection telle que la règle, le baromètre et l'axe de la colonne soient parallèles dans les limites de la précision requise (*voir* le baromètre et manomètre, *Pl. I*).

Lorsque les deux ménisques ne sont pas situés dans la même verticale, comme c'est le cas dans les manomètres pour les faibles pressions, ce second procédé est le seul applicable. Son emploi est alors très délicat. Il faut s'assurer par des moyens particuliers que la colonne supportant les microscopes n'éprouve aucun déplacement dans le sens vertical, lorsqu'on passe d'une position à l'autre, ou, le cas échéant, mesurer le déplacement qui se produit. Voici le procédé employé dans ce but par M. Marek [1] :

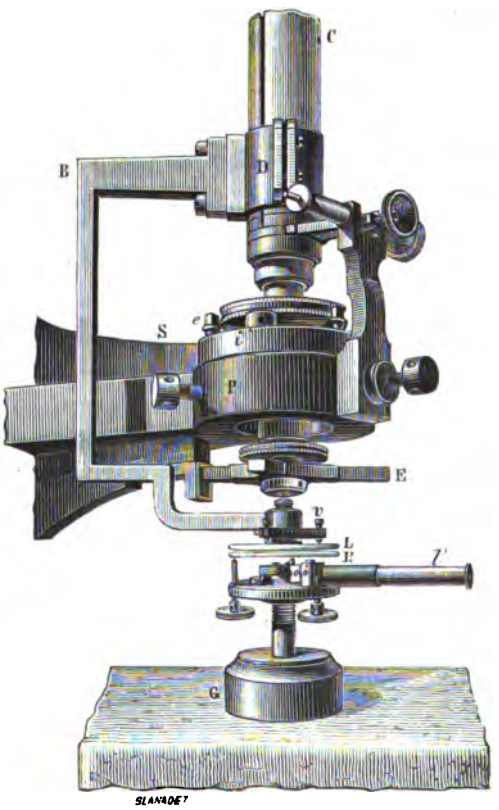
« Sur la colonne C (*fig.* 14) est adapté, au moyen de la douille D, le bras recourbé B. Ce dernier porte une lentille L à faible courbure, qu'on peut déplacer légèrement dans le sens horizontal, jusqu'à ce qu'un point marqué sur sa surface inférieure se trouve dans l'axe de rotation. Cette condition est réalisée quand le point ne cesse pas, si l'on tourne l'instrument, d'être le

---

[1] W.-J. Marek, *Travaux et Mémoires*, t. III, p. D.27.

centre d'un petit cercle repère tracé sur la surface supérieure d'une plaque de verre L′ qu'on a placée sur l'appareil G. Celui-ci porte un prisme à réflexion totale *o* qui reçoit un faisceau de lumière monochromatique par la glace sans tain *o′*, et qui le renvoie après réflexion sur la surface de la lentille, dans la petite lunette *l′*.

Fig. 14.



» On voit, dans cette lunette, se produire les anneaux de Newton. A l'aide de vis de réglage *e*, on peut amener, dans l'axe de rotation, le centre de courbure de la lentille correspondant au point marqué, ce qui se traduit par le fait que les anneaux ne se décentrent plus par rapport au cercle repère, à la suite d'une rotation de l'instrument.

» Or si, pendant cette rotation, le cathétomètre se soulève ou

s'abaisse, les anneaux, tout en restant centrés, se rétrécissent ou s'élargissent en passant par le cercle repère, et chaque anneau passé correspond, comme dans le dilatomètre de M. Fizeau [1], à un déplacement vertical de $0^{mm},00029$ environ. »

L'inclinaison des lunettes sur l'horizon peut aussi varier; les variations se mesurent à l'aide des niveaux surmontant les microscopes; la correction qui en résulte, en valeur angulaire ou en valeur linéaire, à la distance de la règle, se détermine en mesurant, au moyen du micromètre, le déplacement apparent de la règle, pour diverses positions de la bulle du niveau.

13. Mesure de la température. — Trois ou quatre thermomètres suffisent généralement pour déterminer la température d'un baromètre normal ; on n'en emploie un plus grand nombre que lorsque la température de la salle est peu uniforme. Ces thermomètres sont régulièrement espacés le long de l'instrument, et placés dans des conditions semblables à celles auxquelles les parties voisines du baromètre sont soumises. Pour cela, on fait plonger les réservoirs des thermomètres dans des tubes pleins de mercure, sensiblement égaux aux parties correspondantes du baromètre. Un thermomètre peut être également appliqué contre la règle, ou encastré dans une pièce de même métal et de même section, placée dans son voisinage immédiat. Un support spécial porte des lunettes pour lire les thermomètres.

Suivant les circonstances, on admet pour tout l'instrument la température moyenne de tous les thermomètres, ou l'on calcule séparément la température du mercure et de la règle. Ou bien, lorsque la température varie fortement avec la hauteur, on substitue à la moyenne arithmétique un nombre calculé en dessinant la courbe de répartition de la température, et en estimant par un procédé approximatif la superficie de cette courbe.

On a essayé quelquefois, mais jusqu'ici sans succès, de plonger un baromètre dans un liquide. Par contre, il est aisé d'enfermer tout l'instrument dans une caisse en cuivre, percée des fenêtres nécessaires.

Il arrive fréquemment que, dans le réglage de l'instrument

---

[1] *Voir* Chap. VI.

pour une mesure, on déplace, par un piston plongeur ou un réservoir auxiliaire, une quantité de mercure assez considérable pour que la partie médiane du baromètre, formée en général par un tube étroit, se trouve remplie en entier par du mercure qui se trouvait jusque-là à un niveau différent. Les thermomètres voisins n'indiquent pas alors la température du mercure. Pour éviter cette cause d'erreur, il convient de régler toujours approximativement l'instrument quelque temps avant la mesure [1].

14. Réductions. — La hauteur barométrique, mesurée au moyen d'un mètre exact à zéro et divisé en millimètres normaux [2], ou ramenée à ces suppositions par l'application de corrections appropriées déterminées par l'*étude* de la règle, doit être réduite, conformément à la formule du n° 7, aux conditions adoptées comme normales. Les corrections principales se rapportent à la température et à l'accélération de la pesanteur.

1° *Température.* — Soient respectivement

$$V_t = V_0(1 - \alpha_m t + \beta_m t^2),$$
$$l_t = l_0(1 + \alpha_r t + \beta_r t^2)$$

le volume et la longueur que prennent à t° la quantité de mercure dont le volume à 0° est V_0, et la règle dont la longueur à 0° est l_0.

La hauteur barométrique h_0 réduite à zéro se déduira de la hauteur observée par la formule

$$h_0 = h\,\frac{1 + \alpha_r t_1 + \beta_r t_1^2}{1 + \alpha_m t_2 + \beta_m t_2^2},$$

t_1 et t_2 étant respectivement la température de la règle et du mercure.

On peut écrire

$$h_0 = h(1 + \alpha_r t_1 + \beta_r t_1^2)[1 - \alpha_m t_2 + (\alpha_m^2 - \beta_m)t_2^2]$$

---

(1) Cette remarque est due à M. Pernet.

(2) On construit couramment des règles en laiton avec tracé sur lame d'argent incrustée où les erreurs de division ne dépassent pas $0^{mm},01$.

et enfin, pour $t_1 = t_2$,

$$h_0 = h[1 - (\alpha_m - \alpha_r)t + (\alpha_m^2 - \beta_m + \beta_r)t^2].$$

Les meilleures données que l'on possède sur la dilatation du mercure résultent des expériences de Regnault. M. Broch [1] a réuni l'ensemble des résultats dans la formule à trois termes

$$V_t = V_0[1 + (181792t + 0,175t^2 + 0,0351t^3)10^{-9}].$$

Les températures sont exprimées dans l'échelle du thermomètre à air.

Cette formule peut être réduite à une expression du second degré, dont la valeur s'écarte de la première, d'une quantité de beaucoup inférieure aux erreurs des mesures de Regnault [2]; les coefficients de cette formule sont

$$\alpha_m = 181\,770.10^{-9},$$
$$\beta_m = 2,047.10^{-9}.$$

Dans l'échelle du thermomètre à hydrogène, ces coefficients deviennent

$$\alpha = 181\,892.10^{-9},$$
$$\beta = 0,235.10^{-9}.$$

Il faut, autant que possible, déterminer la dilatation de la règle du baromètre, soit directement, au moyen du comparateur, soit sur un échantillon de même métal. A défaut, on peut admettre les coefficients suivants, rapportés au thermomètre à hydrogène [3] (*voir* Tables I et II).

Platine iridié.....	$\alpha = 8,65.10^{-6}$	$\beta = 1,7.10^{-9}$
Acier.....	10,40	5,2
Laiton.....	18,4	5,8
	18,8	5,2
Bronze.....	17,54	5,2
Bronze phosphoreux...	16,6	4,6
	17,0	5,1

[1] O.-J. Broch, *Dilatation du mercure* (*Travaux et Mémoires*, t. III).

[2] Cette formule concorde aussi bien que possible avec la première entre 0° et 40° (*voir* Chap. VI, *Transformations*).

[3] J.-R. Benoit, *Nouvelles études et mesures de dilatations par la methode de M. Fizeau* (*Travaux et Mémoires*, t. VI, p. 190; 1888).

2° *Pesanteur.* — On est convenu de réduire toutes les observations où g intervient, à ce qu'elles seraient si ce coefficient avait une valeur constante, celle qu'il possède à 45° de latitude et au niveau de la mer. M. Broch [1], en complétant une formule de Laplace et en tenant compte d'un grand nombre d'observations, a proposé d'adopter, pour la réduction de g sous la latitude φ et à l'altitude M en mètres, la formule suivante (*voir* Table III) :

$$\frac{g_{\varphi,M}}{g_{45,0}} = (1 - 0,00259 \cos 2\varphi)(1 - 0,0000001 96 M).$$

On réduit une pression barométrique, observée dans le lieu dont les coordonnées sont φ et M, en multipliant la hauteur mesurée, réduite à 0°C., par le facteur $\frac{g_{\varphi,M}}{g_{45,0}}$. Le procédé le plus pratique pour cette réduction consiste à dresser, pour le lieu de l'observation, une Table dont l'argument est $\frac{g_{\varphi,M}}{g_{45,0}} - 1$, et la variable h_0. On a ainsi, pour toutes les pressions que l'on peut avoir à réduire, la correction relative à la pesanteur. Cette correction est à Paris, pour la pression normale, d'environ $+ 0^{mm},25$.

15. Corrections secondaires. — Nous venons de voir quelles sont les corrections principales qu'il faut appliquer à chaque lecture barométrique, et qui constituent souvent toute la réduction. Nous avons encore à nous occuper de quelques corrections, toujours très faibles, parfois nulles, dont la somme a été désignée, dans la formule de départ, par le terme φ (p. 16).

Capillarité. — Nous avons vu comment on élimine l'effet des forces capillaires dans les baromètres de précision. Dans les baromètres de laboratoire ou de voyage, les simplifications nécessaires de la construction entraînent d'ordinaire des erreurs de capillarité assez sensibles. On peut appliquer aux lectures une correction convenable déduite du diamètre du tube et de la hauteur du ménisque (*voir* Table IV). Mais il existe encore, dans ces baromètres, d'autres erreurs, provenant de ce que les conditions rela-

---

[1] O.-J. Broch, *Accélération de la pesanteur, etc.* (*Travaux et Mémoires*, t. I, p. A.9; 1881).

tives à la construction des baromètres de précision ne sont pas suffisamment remplies; c'est pourquoi il est préférable, quand on le peut, de déterminer la correction totale du baromètre, en le comparant, à ménisque ascendant, avec un baromètre normal.

Pression de l'air dans la chambre du baromètre. — Les traces d'air enfermées au-dessus du mercure exercent sur celui-ci une pression inversement proportionnelle au volume de la chambre; la correction, ayant été déterminée pour une position quelconque du mercure, pourra donc être calculée pour les autres. Voici le procédé proposé par Arago pour déterminer cette correction.

La capacité de la chambre barométrique ayant été jaugée approximativement pour diverses distances au sommet (par exemple pour l'extrémité des pointes, dans les baromètres qui en sont munis), on compare, pour les capacités connues de la chambre, le baromètre à un autre de ces instruments, de même précision, dont le ménisque supérieur a été ramené toujours au même niveau. La variation de l'équation relative des baromètres donne la différence des corrections du premier, pour les niveaux auxquels il a été observé; la correction elle-même s'en déduit en tenant compte du rapport des volumes.

Dans un baromètre rempli dans le vide et bouilli, la pression de l'air est si faible qu'on ne la constate que par une série d'observations précises. On peut même craindre, dans ce cas, que les variations constatées ne soient dues, en grande partie, aux erreurs de réfraction, lorsque celles-ci n'ont pas été mesurées.

Tension des vapeurs mercurielles. — Les vapeurs de mercure qui se développent dans la chambre fermée du baromètre dépriment le ménisque supérieur d'une quantité qui augmente à mesure que la température s'élève. Cette dépression reste toujours très petite, et les résultats des mesures faites par plusieurs physiciens sont relativement très discordants.

Regnault (1) s'occupa, à deux reprises, de cette question. Dans une première série d'expériences, il chercha à mesurer la tension de la vapeur à des températures comprises entre 0° et 100°; il

(1) REGNAULT, *Relation des expériences*, t. I, p. 501, et t. II, p. 506; 1842 et 1847.

admit, pour le calcul, que la tension à 0° est nulle. Plus tard, il poursuivit ses expériences jusque vers 512° et détermina les constantes de la formule de Biot au moyen des résultats obtenus à 128°, 256°, 384° et 512°. Il admit, dans ce nouveau calcul, la valeur $0^{mm},02$ à 0°; mais, comme il le dit (t. II, p. 519), cette valeur est hypothétique; « elle est trop petite pour pouvoir être appréciée avec quelque certitude ».

M. Hagen [1] reprit la question, et fit des mesures pour un grand nombre de températures comprises entre — 87° et 0°, puis dans le voisinage de 50°, 100°, 150° et 200°. Il supposa la pression nulle à la température de congélation du mercure et la trouva égale à $0^{mm},015$ à 0°. Les résultats des observations furent représentés par un polynôme du troisième degré.

M. Hertz [2] introduisit, dans une formule théorique, les résultats d'expériences faites entre 89° et 207°; aux températures plus basses, les erreurs surpassaient les quantités à mesurer. Les tensions aux températures ordinaires furent calculées par extrapolation.

Enfin M. Ihmori [3], en absorbant la vapeur mercurielle par de la mousse de platine, a mesuré une *limite inférieure* de la tension aux basses températures.

Nous réunirons, dans le Tableau suivant, les résultats des quatre séries de mesures citées :

	Tension de la vapeur mercurielle d'après			
	Regnault.	Hagen.	Hertz.	Ihmori.
	mm	mm	mm	mm
0	0,020	0,015	0,0002	0,0003
10	0,027	0,018	0,0005	0,0008
20	0,037	0,021	0,0013	
30	0,053	0,026	0,0029	

Pour décider entre ces nombres très discordants, il faut procéder

---

(1) E.-B. HAGEN, *Ueber die Spannungen des gesättigten Quecksilberdampfes bei niederen Temperaturen* (*Wied. Ann.*, t. XVI, p. 610; 1882).

(2) HERTZ, *Ueber den Druck des gesättigten Quecksilberdampfes* (*Wied. Ann.*, t. XVII, p. 193; 1882).

(3) IHMORI, *Ueber die Aufnahme des Quecksilberdampfes durch Platinmohr* (*Wied. Ann.*, t. XXVIII, p. 81; 1886).

par élimination. Le point de départ des nombres de Regnault est hypothétique. Les nombres de Hertz sont extrapolés. Ihmori ne donne qu'une limite inférieure. Les résultats de Hagen restent donc les plus probables; cependant, les quantités mesurées étant à la limite de la précision que l'on peut atteindre, ces nombres peuvent être affectés de fortes erreurs relatives.

On peut conclure de ce qui précède que l'application d'une correction pour la variation de tension des vapeurs mercurielles est illusoire, et que cette correction est assez faible pour n'entraîner aucune erreur sensible pour toutes les températures auxquelles un baromètre peut être exposé.

Compressibilité du mercure. — La hauteur barométrique normale peut être rapportée au mercure soustrait à toute pression ou comprimé par son poids. Ce point n'a pas encore été suffisamment défini; il est aisé de voir d'ailleurs que la différence qui résulte de l'une ou l'autre des suppositions est comprise dans les limites de la précision qu'il est actuellement possible d'atteindre dans ces mesures.

Soit un élément de hauteur dz, situé à la distance z en millimètres, au-dessous de la surface du mercure; $\varkappa$ étant le coefficient de compressibilité du mercure par atmosphère, la contraction de l'élément dz sera

$$\Delta\, dz = \frac{\varkappa z\, dz}{760}$$

et la contraction d'une colonne de hauteur z sous son propre poids

$$\Delta z = \frac{\varkappa}{760}\int_0^z z\, dz = \frac{\varkappa}{760} z^2.$$

Pour $z = 760$,

$$\Delta z = 760\varkappa.$$

Or, on peut admettre, d'après les mesures les plus exactes (¹), $\varkappa = 3{,}5 . 10^{-6}$. La contraction d'une colonne de 760^{mm} sous son propre poids est donc

$$\Delta z = 0^{mm},0027.$$

(¹) *Voir* note, p. 103.

La correction varie avec le carré de la hauteur, et il peut se faire que, dans certaines mesures au manomètre, il ne soit pas illusoire d'en tenir compte.

Supposons, par exemple, que, dans l'étude des propriétés d'un gaz, on parte d'une pression initiale de 1^m de mercure. La tension du gaz à 100° sera d'environ $1^m,37$.

		mm
La correction de compressibilité	pour 1000^{mm} est...	0,0046
»	pour 1370^{mm} » ...	0,0086
	Différence.....	0,0040

Comme, dans ces mesures, on opère par différence avec le même manomètre, une partie des erreurs instrumentales s'élimine, et la précision de la moyenne de quelques mesures est voisine de la correction de compressibilité; il y a donc lieu de l'appliquer.

Forces électriques. — On sait que le mercure d'un baromètre se charge à un certain potentiel négatif, dont la valeur dépend de ses mouvements dans le tube et de l'état électrique et hygrométrique de l'air. Les corps environnants exercent donc sur le mercure des forces attractives ou répulsives, suivant leur état. L'effet de ces forces est mal connu; il est sans doute extrêmement faible, et le seul phénomène qui paraisse bien constaté jusqu'ici est celui qui se produit lorsqu'on approche une pointe d'un ménisque pour déterminer sa position : le mercure se soulève, touche la pointe et redescend aussitôt. L'amplitude du mouvement atteint plusieurs microns.

16. Remplissage du baromètre. — Un baromètre à large tube doit nécessairement être rempli sur place, afin d'éviter les accidents du transport. Il faut auparavant nettoyer l'intérieur du tube avec le plus grand soin; on emploie, pour cela, successivement les liquides suivants : solution de potasse caustique, eau distillée, acide nitrique, eau distillée, ammoniaque, eau distillée, alcool et éther.

Le tube est ensuite soudé à l'appareil en verre représenté par la *fig.* 15. Le crochet qui termine le baromètre sert, dans la deuxième forme décrite (*fig.* 6, p. 18), à empêcher la rentrée de l'air lors du montage de l'instrument. L'appareil adapté au baromètre part du

renflement R; il consiste en un tube vertical A, élargi dans le haut et relié, par le raccord P, à une machine pneumatique pouvant faire le vide à une fraction de millimètre près. Le tube A porte une petite tubulure latérale effilée, s'engageant dans la branche soudée au baromètre; cette dernière communique, par le tube de jonction *d*, avec le tube vertical qui conduit à la pompe.

Fig. 15.

Le mercure, bien purifié, est introduit dans l'éprouvette C. On fait le vide dans l'appareil, dont on chauffe toutes les parties, afin d'en chasser l'humidité; puis on élève l'éprouvette jusqu'à ce que le mercure, atteignant le tube latéral A, s'écoule en petites gouttes dans le réservoir R et dans le baromètre. On arrête l'opération à plusieurs reprises et l'on fait bouillir fortement la dernière portion de mercure introduite. On peut se servir, pour cela, d'un bain de chlorure de calcium ou de paraffine, ou simplement d'un brûleur à plusieurs petites flammes en ligne droite, recouvert

d'une toile de cuivre. Cette opération demande les plus grandes précautions et une certaine habitude des manipulations.

Dans un baromètre bien rempli, l'adhérence du mercure contre le verre est telle qu'on peut élever le sommet du tube de 10 à 12^{cm} au-dessus de la position normale du ménisque sans que la séparation s'opère; on est alors obligé de la provoquer par de petits chocs, afin d'éviter une descente brusque du mercure d'un niveau trop élevé.

Nature du mercure. — Nous avons supposé le mercure parfaitement pur et à sa densité normale. Il nous reste à dire dans quelles limites varie la densité du mercure purifié par divers procédés.

Des mesures différentielles, faites, sous la direction de M. Wild, par MM. Dohrandt et Mägis, ont donné, pour divers échantillons, les différences suivantes, entre le mercure préparé comme il est dit et un échantillon traité au sesquichlorure de fer (1) :

1. Mercure préparé avec le sublimé corrosif.....	— 0,00020
2. Le précédent, traité à l'acide acétique et à la potasse caustique.....	— 0,00009
3. Le précédent, distillé dans l'acide carbonique sous la pression de 10^{mm}.....	+ 0,00011
4. Le précédent, distillé dans un courant d'hydrogène.	— 0,00005

M. Marek (2) a fait des déterminations absolues de la densité de plusieurs portions de mercure. Voici les résultats relatifs aux principaux échantillons, à 0° :

1. Mercure traité à l'acide nitrique, l'eau ammoniacale, l'eau pure, et distillé dans le vide.....	13,59563
2. Même traitement chimique, séché dans le vide.....	13,59563
3. Chauffé avec une solution de bisulfate de potasse, filtré dans le vide.....	13,59560
4. Mercure du commerce filtré quatre fois.....	13,59557

(1) H. Wild, *Ueber die Bestimmung des Luftdruckes* (*Repertorium für Meteorologie*, Bd. III, p. 49; 1874).

(2) W.-J. Marek, *Pesées* (*Travaux et Mémoires*, t. II, p. D.56; 1883).

Regnault (1) avait obtenu antérieurement	.....	13,59593
M. Wild (2) »	.....	13,59556
M. Volkmann (3) »	.....	13,59553

Or une différence d'une unité dans le quatrième chiffre après la virgule correspond à une variation de la hauteur barométrique de $0^{mm},006$; les plus fortes différences, constatées par M. Wild et M. Marek, introduiraient des erreurs à peine supérieures à $0^{mm},01$.

La méthode de purification ordinairement employée par les constructeurs est la suivante : le mercure, agité avec une solution de nitrate de mercure, est introduit en gouttelettes, par un entonnoir effilé, dans un flacon contenant de l'acide nitrique dilué, puis versé dans de l'acide sulfurique concentré, enfin maintenu pendant quelque temps dans un flacon rempli de potasse caustique en morceaux; le mercure en est extrait par un robinet placé à sa partie inférieure.

17. Baromètre de laboratoire. — Dans bien des cas, il suffit de mesurer la pression atmosphérique avec une précision de $0^{mm},1$ à $0^{mm},2$; on peut alors se servir d'un baromètre simplifié. Voici une forme très pratique du baromètre de moyenne précision ou baromètre de laboratoire.

Un tube droit (*fig.* 16), de 1^{cm} environ de diamètre, portant une division en millimètres dans la partie utile, plonge dans une petite cuvette en verre, qu'il supporte par l'intermédiaire d'une monture d'acier, mastiquée d'une part au baromètre, d'autre part au col de la cuvette; les deux parties de la monture s'emboîtent par un pas de vis. L'extrémité inférieure du tube est courbée hors de l'axe et porte une pointe de verre très fine, qui descend verticalement vers le centre de la cuvette. En vissant celle-ci, on élève le mercure jusqu'au niveau de la pointe.

Les ménisques sont éclairés par des miroirs, et la lecture dans

(1) REGNAULT, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XIV, p. 236.

(2) H. WILD, *Bericht über die Arbeiten zur Reform der schweizerischen Urmaasse*, p. 139; Zurich, 1868.

(3) P. VOLKMANN, *Bestimmung des specifischen Gewichtes des Quecksilbers* (*Wied. Ann.*, Bd. XIII, p. 209; 1881).

la branche fermée se fait à l'aide d'une lunette ou simplement à travers un tube perpendiculaire au baromètre, et qui fixe la direction du rayon visuel.

Fig. 16.

Un thermomètre accompagne l'instrument.

La correction additionnelle à apporter après que les réductions (14) ont été faites, et qui comprend essentiellement la capillarité et l'erreur du point de départ au zéro de l'échelle, est déterminée par comparaison avec un baromètre de précision (15).

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES THERMOMÈTRES.

18. Éléments de l'étude. — L'étude individuelle des thermomètres consiste, comme nous l'avons vu (3), dans la détermination des corrections relatives aux irrégularités de la division et du tube, aux déformations mécaniques du réservoir et à la valeur moyenne des divisions; elle comprend, pour les thermomètres étalons, trois parties distinctes :

1° Étude de la division et calibrage;

2° Détermination du coefficient de pression du réservoir;

3° Détermination de l'intervalle fondamental.

Cette étude étant terminée, les résultats en sont consignés dans quatre Tables de corrections, qui servent ensuite à réduire toutes les lectures aux conditions idéales auxquelles satisferait un thermomètre parfait. Les corrections contenues dans ces Tables sont les suivantes :

1° *Les corrections de calibre et de division,* qu'il faut appliquer aux lectures, pour qu'elles correspondent exactement aux fractions de l'intervalle [0·100] indiquées approximativement par la division.

2° *Les corrections de pression extérieure;* ces corrections réduisent les lectures à ce qu'elles seraient si le thermomètre était soumis à une pression extérieure constante; on réduit généralement les lectures à la pression atmosphérique normale.

3° *Les corrections de pression intérieure,* qui ramènent les lectures, quelle que soit la position du thermomètre, à la position

horizontale, dans laquelle la pression exercée par le mercure sur le réservoir se réduit à la pression capillaire, que l'on considère comme constante ([1]).

4° *Les corrections d'intervalle fondamental,* qui, appliquées aux lectures exprimées en divisions moyennes de l'échelle, les réduisent en degrés.

Pour les thermomètres auxiliaires, la valeur moyenne d'une division doit être déterminée par des comparaisons avec un thermomètre étalon faites en un point suffisamment éloigné du zéro, dans des conditions données de la pression extérieure et intérieure. Les corrections des autres points sont déterminées par un calibrage. La Table des corrections d'intervalle fondamental est alors remplacée par une Table équivalente relative à la valeur moyenne du degré; par un choix convenable des unités, on peut faire rentrer cette dernière dans la Table des corrections de calibre.

On peut enfin déterminer, par des comparaisons, les corrections d'une série de points suffisamment rapprochés, et renoncer au calibrage (4). Pour une somme égale de travail, ce procédé est généralement moins précis que le premier.

DIVISION.

19. Tracé. — La division d'un thermomètre peut être équidistante ou adaptée au calibre du tube; dans ce dernier cas, elle est dite *rectifiée.*

Cette adaptation, qui peut être suffisamment exacte pour les thermomètres de second ordre, est généralement trop imparfaite pour les thermomètres de précision; elle ne dispense pas d'un calibrage *a posteriori,* par lequel on détermine les erreurs minimes échappées au constructeur. Dans ce cas, le premier calibrage du constructeur est inutile; il est même, le plus souvent, nuisible. En effet, le calibrage d'une échelle consiste à déterminer les corrections d'un certain nombre de points équidistants et à

([1]) Cette pression subit, en réalité, de faibles variations, dont il est très difficile de tenir compte; nous y reviendrons dans le troisième Chapitre.

faire une interpolation pour les traits intermédiaires, en admettant que les corrections varient d'une manière continue; il faut, pour cela, que la section du tube et la division ne présentent aucun saut brusque sensible. Or l'expérience montre que cette condition est presque toujours remplie en ce qui concerne la section du tube; tandis que le tracé rationnel, à l'aide de la machine à diviser, d'une division rectifiée rend l'emploi de cet instrument très compliqué, et les constructeurs s'en tiennent le plus souvent à une division *mixte,* consistant en plusieurs sections de traits équidistants dont les extrémités sont rectifiées. Enfin, quelques constructeurs tracent toute la division à la main. Dans le premier cas, la courbe des corrections totales de calibre et de division présente des points anguleux; dans le second, elle est tout à fait discontinue.

Parmi les divisions équidistantes, il faut distinguer les divisions purement *arbitraires* de celles qui sont adaptées à très peu près à l'intervalle fondamental; dans les premières, l'intervalle [0·100] est donné par un nombre quelconque de divisions, les traits étant par exemple distants de 1^{mm}; dans les dernières, au contraire, on adopte comme équidistance des traits la longueur la plus voisine possible de celle qui se déduit de la mesure de l'intervalle [0·100].

Il existe de bonnes machines à diviser, d'une construction simple, pouvant donner des équidistances progressant par demi-microns. Le degré étant divisé, par exemple, en dixièmes, et l'intervalle fondamental en mille parties, la longueur des mille intervalles pourra donc progresser par demi-millimètres, et la division pourra être adaptée à cet intervalle à moins d'un quart de millimètre près. Si le degré a une longueur de 5^{mm}, l'erreur maxima résultant du défaut d'adaptation de la machine à l'intervalle fondamental ne sera que de 0,05 degré. Les lectures brutes correspondent ainsi à très peu près aux lectures réduites; cette concordance approximative entre les lectures brutes et les lectures réduites simplifie beaucoup l'emploi des thermomètres, et rend certaines erreurs plus difficiles.

20. Étude de la division. — Les inconvénients des divisions rectifiées les ayant fait rejeter pour les thermomètres de précision,

nous pouvons nous borner à indiquer comment on vérifie les divisions dites *équidistantes*.

Les erreurs absolues de la division des thermomètres n'ont aucune importance, tant qu'elles n'excèdent pas certaines limites; ce qu'il importe de découvrir par l'examen de la division, ce sont les discontinuités. Une bonne machine à diviser, habilement manœuvrée, doit fournir un tracé dans lequel les discontinuités sont inférieures aux extrêmes limites de la précision que l'on peut atteindre dans la mesure des températures (un millième de degré). Mais il arrive que, pour des thermomètres de grandes dimensions, le tracé complet nécessite un raccordement; il se peut alors que, dans les points où la division a été laissée et reprise, les erreurs dépassent un peu les limites admises [1]; la même chose peut se produire par une fausse manœuvre de la machine.

Pour découvrir les discontinuités dans le tracé, on fixe le thermomètre sur le banc d'une machine à diviser, dont le chariot porte un microscope avec une paire de fils parallèles. On mesure, à l'aide de la vis de la machine, une suite d'intervalles comprenant un nombre égal de divisions; on pointe, par exemple, tous les degrés; si l'un d'eux diffère sensiblement des autres, il convient d'étudier avec soin tout l'intervalle compris entre deux points consécutifs du calibrage; on fait, pour cela, plusieurs séries de pointés pour tous les traits de cet intervalle.

Désignons par D la distance des points entre lesquels on veut déterminer des corrections de division; par n le nombre des intervalles qu'ils comprennent, par $d_2, d_3, \ldots, d_{n+1} = \mathrm{D}$ la distance des traits successifs au premier; la correction du trait i sera

$$\Delta d_i = \frac{i-1}{n}\mathrm{D} - d_i.$$

En faisant varier i de 2 à $n+1$, on obtient une progression arithmétique, dont l'excès de chaque terme sur l'intervalle correspondant donne la correction de chaque trait. La position du

---

[1] Dans les thermomètres de premier ordre construits par M. Tonnelot, à Paris, il est très rare de rencontrer une erreur de division atteignant 0,003 degré.

trait d_i devant être corrigée de $+\Delta d_i$, une lecture faite près de ce trait devra subir la correction $-\Delta d_i$.

Dans le cas d'une division rectifiée, il faut substituer, pour tout le calcul du calibrage, une division idéale à la division réelle du thermomètre, et revenir ensuite à cette dernière. Ce travail est extrêmement long et fastidieux.

CALIBRAGE.

21. Séparation d'une colonne. — Le calibrage d'un tube consiste dans la comparaison de ses différentes parties entre elles, au moyen de diverses colonnes de mercure, que l'on mesure dans un certain nombre de positions, au moyen de la division tracée sur la tige.

Le calibrage d'un thermomètre de précision a lieu *a posteriori*, l'instrument étant terminé et prêt à servir; il ne peut être fait que si le tube est presque complètement vide d'air ([1]).

Pour isoler, à l'intérieur du tube, une colonne de longueur donnée, on opère de la manière suivante :

Le thermomètre étant maintenu en position verticale, le réservoir tourné en haut et l'autre extrémité reposant sur le doigt médius de la main droite, on lui donne de légers chocs de haut en bas, qui déterminent la descente du mercure dans le tube; d'un mouvement rapide de la main droite on retourne le thermomètre, et, le frappant transversalement sur un doigt de la main gauche, on produit une séparation du mercure au col du réservoir. La colonne qui se trouve dans la tige sert à en isoler d'autres, grâce à la propriété des colonnes mercurielles très fines, de se séparer à l'endroit où a eu lieu la jonction. On place donc le thermomètre en position horizontale, et l'on amène la partie inférieure de la colonne en un point du tube que l'on observe; chauffant alors le réservoir dans la main gauche, ou au-dessus d'une petite lampe, on reprend la première colonne; puis on laisse la température descendre, et l'on donne un choc longitudinal au thermomètre à

([1]) Les thermomètres à mercure destinés aux températures élevées sont remplis d'air ou d'azote; ils sont calibrés avant d'être fermés.

l'instant où la colonne comprise entre le point de jonction et l'extrémité a précisément la longueur voulue.

La séparation du mercure est provoquée par la présence d'une petite bulle gazeuse, souvent imperceptible, qui se fixe aux parois du tube au moment où a lieu la jonction, et n'est plus entraînée par le mercure.

Quand le calibrage est terminé, on doit avoir soin de faire passer cette bulle au-dessus de la totalité du mercure, pour ne pas être exposé, au cours des expériences, à une séparation spontanée, qui serait à craindre principalement dans la position horizontale.

Il est des cas où la bulle est si petite que le procédé ci-dessus ne réussit plus pour séparer des colonnes très courtes; on arrive alors le plus souvent au but en chauffant légèrement la tige avant la jonction des deux parties du mercure. Cette pratique, assez dangereuse, ne doit être employée qu'exceptionnellement, et avec les plus extrêmes précautions [1]; les observations ne peuvent être reprises qu'après quelque temps.

Il arrive que le réservoir d'un thermomètre, trop bien purgé d'air, ne donne plus la moindre bulle gazeuse; il est alors nécessaire d'emprisonner de nouveau de l'air dans le mercure. Pour cela, on remplit de mercure l'ampoule supérieure, de manière à chasser dans le tube capillaire les traces d'air qu'elle contient; puis on chauffe l'ampoule jusqu'à ce que les vapeurs mercurielles, développées à sa partie supérieure, refoulent le mercure.

On peut généralement éviter, pendant le calibrage, de priver totalement d'air le tube et le réservoir; il faut, pour cela, commencer les observations par les colonnes longues, et raccourcir celles-ci jusqu'à ce qu'à la température ambiante le mercure du réservoir s'approche de l'extrémité inférieure de l'échelle calibrée; on chasse alors dans l'ampoule supérieure ou dans une ampoule moyenne la dernière colonne employée, et l'on cherche une seconde bulle pour les colonnes plus courtes.

Pendant tout le calibrage, il faut prendre garde de provoquer des chocs violents du mercure dans le réservoir; il arrive en effet as-

---

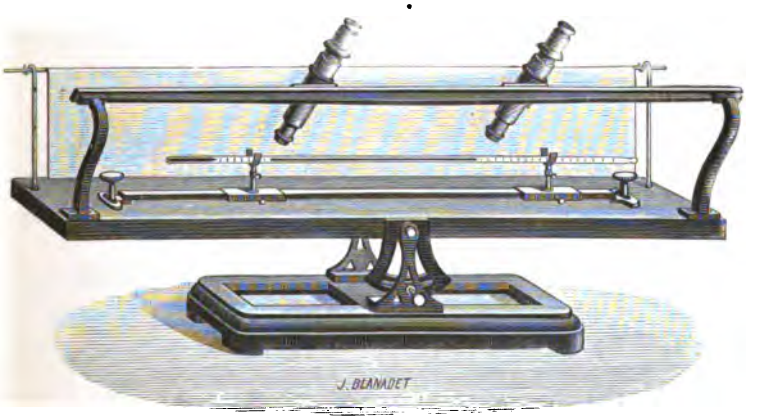
[1] Quelques observateurs recommandent d'employer la flamme du chalumeau pour isoler des colonnes de mercure. Ce procédé réussit à coup sûr, mais il ne peut être appliqué à des thermomètres de quelque valeur.

sez fréquemment que, par suite d'une secousse brusque, imprimée au thermomètre lorsque le réservoir n'est pas complètement rempli, il se produise une félure étoilée à la naissance du tube.

22. Appareil à calibrer et observations. — L'appareil servant au calibrage a subi diverses transformations; les derniers perfectionnements, dus en grande partie à M. Pernet, l'ont amené à une forme à peu près définitive, qui est la suivante :

Une forte planche de chêne (*fig.* 17) porte en son milieu une

Fig. 17.



glissière longitudinale munie, à ses extrémités, d'organes pour le réglage latéral; deux petits supports à coulisse, terminés par des fourchettes garnies de liège, dans lesquelles repose le thermomètre, peuvent être déplacés le long de la glissière. Une seconde glissière, fixée à deux forts montants, supporte deux lunettes parallèles pour les observations. Un rideau de papier de soie, que l'on peut enrouler autour d'une baguette en laiton, sert à régler l'éclairage. La planche est portée sur un axe, et peut être inclinée de façon que la pesanteur s'oppose aux mouvements spontanés de la colonne mercurielle; elle est arrêtée dans la position convenable, sur le pied en fonte de l'appareil, par une vis de serrage agissant dans une coulisse en arc de cercle, fixée au bâti.

Les observations sont faites de préférence avec la lunette sans micromètre. L'observateur peut choisir, à son gré, la position d'une

des extrémités de la colonne et la placer, par exemple, sur le trait (dans les observations avec traits derrière) ou au milieu d'un intervalle; l'erreur sur cette observation est alors presque nulle.

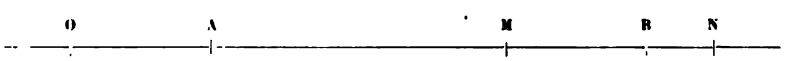
Les lectures doivent être faites à l'aller et au retour, afin de diminuer les erreurs d'observation, de découvrir les erreurs d'écriture, et d'éliminer partiellement les variations de la longueur de la colonne dues à la marche de la température.

Dans les deux séries d'observations, il faut, autant que possible, placer la colonne dans des positions un peu différentes, afin d'éliminer partiellement les erreurs d'estimation, toujours les mêmes, dans la même région d'un intervalle.

Une élévation de la température de 1 degré produit un allongement de la colonne d'environ 0,00016 de sa longueur.

23. Théorie du calibrage. — Avant de préciser davantage le système d'observations et de calculs que nécessite un calibrage, nous exposerons quelques points de la théorie géométrique du problème.

Supposons un tube de verre portant des traits équidistants qui figurent les abscisses; soient O et N le premier et le dernier trait, délimitant un volume donné du tube; celui-ci aura, en général,



une section variable s; appelons σ la section moyenne entre O et N. Nous dirons que les corrections sont exprimées *dans le système* [O·N].

Soit M un point quelconque du tube; désignons par o, m et n les abscisses respectives de O, M et N. La correction x_m, qu'il faut appliquer à une lecture m, doit la ramener à ce qu'elle serait si, entre O et M, la section du tube était égale à la section moyenne σ. Donc

$$(1) \qquad \int_0^m s\,dm = \sigma(m + x_m)$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad x_m = \int_0^m \frac{s-\sigma}{\sigma}\,dm.$$

On voit que $x_0 = 0$ et que $x_n = 0$, puisque $\frac{1}{n}\int_0^n s\,dm = \sigma$. Enfin

$$(3) \qquad s = \sigma\left(1 + \frac{dx_m}{dm}\right).$$

Donc, dans un système de corrections, la section du tube en un point quelconque est égale à la section moyenne dans ce système, multipliée par l'unité augmentée de la dérivée de la correction au point correspondant.

Cela posé, si nous voulons calibrer le tube considéré, nous observerons les excès de volume de diverses colonnes de mercure sur une suite d'intervalles donnés par le diagramme du calibrage.

Soit $i + \Delta i$ la position de l'extrémité de la colonne voisine de i; nous voulons connaître le volume de la fraction de colonne Δi; ce volume est égal à $s\Delta i$ ou à $\sigma\left(1 + \frac{dx_i}{di}\right)\Delta_i$. Pour calculer ce volume, nous avons besoin de connaître $\frac{dx_i}{di}$. En d'autres termes, on ne peut calculer rigoureusement le calibrage d'un tube que par plusieurs approximations successives; on calcule une première approximation au moyen des Δi mesurés par des sections locales inconnues, et, connaissant une valeur approchée de ces sections données par un premier calcul du calibrage, on corrige les nombres trouvés.

Transformations. — On peut généraliser les formules précédentes.

Soient

A et B deux points quelconques du tube ON;
a et b leurs abscisses;
x_a et x_b leurs corrections de calibre.

On aura

$$(4) \qquad x_a = \int_0^a \frac{s - \sigma}{\sigma}\,dm.$$

et l'on pourra écrire

$$(5) \qquad x_m = x_a + \int_a^m \frac{s - \sigma}{\sigma}\,dm = x_a + \frac{1}{\sigma}\int_a^m s\,dm - (m - a);$$

d'où

$$(6)\qquad \frac{1}{\sigma}\int_a^m s\,dm = (m + x_m) - (a + x_a).$$

Nous pouvons prendre A et B comme points de départ d'un système de corrections et faire complètement abstraction de O et N; alors σ ne sera plus, en général, la section moyenne de la portion de tube considérée, mais seulement une unité arbitraire définie par l'équation

$$(7)\qquad x_b = x_a + \int_a^b \frac{s-\sigma}{\sigma}\,dm,$$

d'où

$$(8)\qquad \sigma = \frac{\int_a^b s\,dm}{(b + x_b) - (a + x_a)}.$$

Nous pouvons aussi partir d'une autre unité de mesure σ' et donner à a la correction arbitraire y_a; puis déterminer σ' de telle façon que la correction de b devienne y_b; alors

$$(9)\qquad \sigma' = \frac{\int_a^b s\,dm}{(b + y_b) - (a + y_a)} = \sigma\frac{(b + x_b) - (a + x_a)}{(b + y_b) - (a + y_a)} = \sigma C,$$

en posant

$$(10)\qquad C = \frac{(b + x_b) - (a + x_a)}{(b + y_b) - (a + y_a)}.$$

La correction d'un point quelconque sera

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} y_m &= y_a + \int_a^m \frac{s-\sigma'}{\sigma'}\,dm \\ &= y_a - (m - a) + \frac{(m + x_m) - (a + x_a)}{C} \\ &= y_a + \frac{x_m - x_a + (1 - C)(m - a)}{C}. \end{aligned}\right.$$

Posons enfin

$$(12) \qquad D = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a)}{(b + y_b) - (a + y_a)} = 1 - C.$$

Nous aurons, en définitive,

$$(13) \qquad y_m = y_a + \frac{x_m - x_a + D(m - a)}{C}.$$

Cette dernière équation est nommée *formule de transformation*.

La signification géométrique de cette formule est très simple. Le problème consiste à faire tourner la courbe des corrections de calibre autour du point A, en changeant l'unité de mesure dans le rapport C : 1, puis à la déplacer parallèlement à elle-même.

Les formules qui précèdent donnent la relation générale

$$(14) \qquad s = \sigma\left(1 + \frac{dx_m}{dm}\right) = \sigma'\left(1 + \frac{dy_m}{dm}\right),$$

qui subsiste entre tous les systèmes de correction d'un même tube.

Enfin, si l'on désigne par λ et λ' l'excès de la longueur d'une colonne sur r divisions du tube, exprimée en unités des deux systèmes, on aura

$$(15) \qquad (r + \lambda)\sigma = (r + \lambda')\sigma', \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r + \lambda}{r + \lambda'} = \frac{\sigma'}{\sigma} = C.$$

24. Équation de condition. — Nous nommerons *points principaux* d'un calibrage ceux dont les corrections de calibre sont déterminées directement; les corrections des autres points sont obtenues par interpolation.

Supposons une colonne de mercure placée approximativement entre les points principaux I et K d'un tube, comprenant entre eux r divisions. Soit a_{ik} l'excès de longueur observé de cette colonne sur l'intervalle [I·K]. Admettons, ce qui est toujours à très peu près exact, que les excès de volume de la colonne soient proportionnels aux longueurs mesurées. En corrigeant les extrémités de la colonne pour la ramener à sa mesure en unités moyennes du tube, on trouve

$$r + a_{ik} + x_k - x_i.$$

Or, d'après les définitions données précédemment (23), cette quantité est égale à $r + \lambda$; donc

$$x_i - x_k + \lambda = a_{ik}.$$

C'est la forme normale de l'équation de condition du calibrage; x_i, x_k et λ sont les inconnues, a_{ik} la quantité observée.

Rigoureusement, nous devons considérer cette équation comme une première approximation, servant à établir les valeurs approchées des corrections de calibre. Après avoir réduit a_{ik} en unités moyennes, on obtient une équation exacte, qui sert à calculer une seconde approximation. Cette nouvelle équation a la même forme que la première. Le calcul de première et de seconde approximation est identiquement le même; nous pouvons donc appliquer les méthodes de calcul à l'équation ci-dessus, que nous considérerons comme exacte, et à la partie droite de laquelle nous appliquerons plus tard une correction.

Pour calculer les corrections de calibre d'un tube, il est nécessaire de posséder autant d'équations indépendantes que le problème comporte d'inconnues. Il existe, dans un calibrage en n parties, $n + 1$ points dont il faut connaître les corrections; mais, les corrections de deux de ces points étant arbitraires, il ne reste plus que $n - 1$ inconnues x à déterminer. Les λ des diverses colonnes employées forment un autre groupe d'inconnues, dont le nombre varie suivant le procédé de calibrage employé.

Nous étudierons diverses méthodes par lesquelles on obtient le nombre strictement suffisant d'équations, ou quelques équations supplémentaires, ou enfin toutes les équations que la nature du problème permet d'établir.

25. Méthode de Gay-Lussac [1]. — En observant, dans n positions successives, une colonne dont la longueur est à peu près égale à une subdivision du calibrage, on obtiendra n équations indépendantes, entre les $n - 1$ inconnues x et le λ de la colonne observée.

En désignant par $1, 2, \ldots, n + 1$ les $n + 1$ points principaux

---

[1] Cette méthode est aussi attribuée à Hallström.

du calibrage, on pourra écrire (¹)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + \lambda = a_{1,2} \\ x_2 - x_3 + \lambda = a_{2,3} \\ x_3 - x_4 + \lambda = a_{3,4} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n - x_{n+1} + \lambda = a_{n,n+1} \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \lambda - a_{1,2} \\ x_3 = x_2 + \lambda - a_{2,3} \\ x_4 = x_3 + \lambda - a_{3,4} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1} = x_n + \lambda - a_{n,n+1} \end{array}\right.$$

$$x_1 - x_{n+1} + n\lambda = \sum_1^n a_{i,i+1} = \mathrm{A}.$$

La dernière équation est obtenue par addition; x_1 et x_{n+1} sont arbitraires. Si les corrections doivent être exprimées dans le système [O·N], on aura

$$\lambda = \frac{\mathrm{A}}{n}$$

et

$$\begin{array}{lll} x_2 & = \frac{\mathrm{A}}{n} - & a_{1,2} \\ x_3 & = \frac{\mathrm{A}}{n} + x_2 & - a_{2,3} \\ x_4 & = \frac{\mathrm{A}}{n} + x_3 & - a_{3,4} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ x_n & = \frac{\mathrm{A}}{n} + x_{n-1} & - a_{n-1,n} \\ x_{n+1} & = \frac{\mathrm{A}}{n} + x_n & - a_{n,n+1} = 0. \end{array}$$

La dernière équation doit être satisfaite identiquement.

La méthode de Gay-Lussac oblige à employer une colonne courte. Il en résulte parfois des difficultés particulières, et l'on a imaginé divers procédés qui en dispensent. Dans ces méthodes, le

(¹) Il serait évidemment plus rationnel d'écrire 0, 1, 2, ..., n; les indices des points correspondraient ainsi aux abscisses. La notation que nous adoptons a été proposée par Hansen, et maintenue par M. Broch, parce qu'elle permet, dans l'emploi de la méthode des moindres carrés, d'établir diverses règles mnémoniques qui facilitent l'emploi des formules. Pour n'avoir pas à modifier plus tard notre notation, nous emploierons dès maintenant les indices dans le même sens que M. Broch (27).

calibrage est fait par plusieurs colonnes longues, et les corrections se déduisent les unes des autres par un calcul récurrent. Nous ne nous étendrons pas sur ces méthodes faciles à trouver, et nous nous bornerons à développer celles dans lesquelles les observations se contrôlent mutuellement.

26. Calibrage complet. — Nous nommerons *calibrage complet* un ensemble d'observations par lequel on établit toutes les équations que l'on peut obtenir. Cet ensemble consiste à observer, dans toutes les positions possibles, des colonnes ayant approximativement $1, 2, 3, \ldots, n-1$ fois la longueur de l'intervalle compris entre deux points principaux consécutifs.

La première colonne, observée comme dans la méthode de Gay-Lussac, fournit n équations.

La seconde, mesurée entre les points

$$[1.3],\quad [2.4],\quad \ldots,\quad [n-1.n+1],$$

en fournit $n-1, \ldots$; la dernière enfin, que l'on place en

$$[1.n] \quad \text{et} \quad [2.n+1]$$

en donne 2. On a donc, en tout,

$$n+n-1+n-2+\ldots+2=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

équations, servant à déterminer les $n-1$ corrections indépendantes x et les $n-1$ longueurs λ.

Voici le Tableau de ces équations (¹) :

$$\begin{array}{llll}
x_1-x_2+\lambda_n=a_{1,2}, & x_1-x_3+\lambda_{n-1}=a_{1,3}, & \ldots, & x_1-x_n+\lambda_2=a_{1,n}, \\
x_2-x_3+\lambda_n=a_{2,3}, & x_2-x_4+\lambda_{n-1}=a_{2,4}, & \ldots, & x_2-x_{n+1}+\lambda_2=a_{2,n+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & x_{n-1}-x_{n+1}+\lambda_{n-1}=a_{n-1,n+1}, & \ldots, & \\
x_n-x_{n+1}+\lambda_n=a_{n,n+1}, & & &
\end{array}$$

(¹) Pour les indices des λ, *voir* la note ci-dessus. L'indice est égal au nombre de positions dans lesquelles la colonne est observée.

La formation et la résolution générale du système d'équations normales résultant des équations de condition qui viennent d'être établies a passé pendant longtemps pour impraticable; mais ce problème, d'une grande importance, a été, dans ces dernières années, l'objet de recherches approfondies qui l'ont considérablement simplifié.

Il existe essentiellement deux méthodes permettant de le résoudre. La première, rigoureusement conforme à la méthode des moindres carrés et imaginée par P.-A. Hansen (1), a été, pour la première fois, simplifiée et adaptée aux thermomètres par M. Marek (2); enfin elle a subi de notables modifications qui lui ont été apportées par M. Broch (3), et qui ont rendu la résolution des équations normales beaucoup moins laborieuse. La seconde est ramenée à la méthode des moindres carrés par un artifice de calcul; elle a été donnée par M. Thiesen (4), et dérive d'un procédé incomplet indiqué par M. Neumann; elle a, sur la première, l'avantage d'être d'une très grande simplicité.

27. Résolution par la méthode des moindres carrés. — Le développement complet de toutes les parties du problème que nous allons exposer est assez long, mais ne présente pas de grandes complications; nous nous contenterons d'indiquer la marche du calcul, sans reproduire toutes les transformations intermédiaires, faciles à retrouver; nous renverrons, pour les détails, au Mémoire de M. Broch.

Le principe de la méthode consiste à substituer aux inconnues x les sommes P et les différences Q des x également dis-

---

(1) P.-A. Hansen, *Bestimmung der Theilungsfehler eines geradlinigen Maassstabes* (*Abh. der math.-phys. Classe der K. sächs. Ges. der Wissenschaften*, XV; Gotha, 1874).

(2) W.-J. Marek, *Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Kalibrirung der Thermometer* (*Carl's Rep.*, XV, p. 300; 1879). — Cf. J.-R. Benoît, *Mesures de dilatation et comparaison des règles métriques* (*T. et M.*, t. II, p. C. 35; 1883).

(3) O.-J. Broch, *Note sur l'étalonnage des sous-divisions d'une règle, etc.* (*T. et M.*, t. V; 1886).

(4) Max Thiesen, *Ueber das Kalibriren von Thermometern* (*Carl's Rep.*, t. XV, p. 285 et 678; 1879).

tants des extrêmes. Posons

$$(1)\quad \begin{cases} P_{n+1} = x_{n+1} + x_1, & Q_{n+1} = x_{n+1} - x_1, \\ P_n = x_n + x_2, & Q_n = x_n - x_2, \\ P_{n-1} = x_{n-1} + x_3, & Q_{n-1} = x_{n-1} - x_3, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ P_{\frac{n}{2}+2} = x_{\frac{n}{2}+2} + x_{\frac{n}{2}}, & Q_{\frac{n}{2}+2} = x_{\frac{n}{2}+2} - x_{\frac{n}{2}} \\ P_{\frac{n}{2}+1} = 2x_{\frac{n}{2}+1}, & \text{si } n \text{ est un nombre pair,} \\ P_{\frac{n+3}{2}} = x_{\frac{n+3}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}, & Q_{\frac{n+3}{2}} = x_{\frac{n+3}{2}} - x_{\frac{n+1}{2}} \\ & \text{si } n \text{ est un nombre impair.} \end{cases}$$

Après avoir calculé les quantités P et Q, nous en déduirons les x par les formules

$$(2)\quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} + Q_{n+1}), & x_1 = \frac{1}{2}(P_{n+1} - Q_{n+1}), \\ x_n = \frac{1}{2}(P_n + Q_n), & x_2 = \frac{1}{2}(P_n - Q_n), \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les dernières équations de ce groupe se déduisent des équations analogues du groupe (1), suivant que n est pair ou impair.

Pour trouver les valeurs des quantités P et Q, on inscrit les observations dans deux Tableaux, ordonnés de telle sorte que les sommes des différentes colonnes fournissent respectivement les équations normales relatives aux λ et aux x.

1° *Équations relatives aux* λ. — Inscrivons, dans chaque colonne verticale, les observations faites avec un même index de mercure; toutes les équations d'une colonne contiennent le même λ, affecté du coefficient $+1$; leur somme est donc une équation normale relative à cette inconnue [1]. Nous placerons en tête de chaque colonne le λ commun à toutes les équations.

---

[1] On rend les formules parfaitement symétriques en ajoutant au système l'équation fictive $x_1 - x_{n+1} + \lambda_1 = 0$.

TABLEAU I. — ÉQUATIONS RELATIVES AUX λ.

Calcul des s et Σ.

λ_n	λ_{n-1}	λ_{n-2}	.....	λ_3	λ_2
$x_1 - x_2 = a_{1,2}$	$x_1 - x_3 = a_{1,3}$	$x_1 - x_4 = a_{1,4}$	.....	$x_1 - x_{n-1} = a_{1,n-1}$	$x_1 - x_n = a_{1,n}$
$x_2 - x_3 = a_{2,3}$	$x_2 - x_4 = a_{2,4}$	$x_2 - x_5 = a_{2,5}$	.....	$x_2 - x_n = a_{2,n}$	$x_2 - x_{n+1} = a_{2,n+1}$
$x_3 - x_4 = a_{3,4}$	$x_3 - x_5 = a_{3,5}$	$x_3 - x_6 = a_{3,6}$	.....	$x_3 - x_{n+1} = a_{3,n+1}$	
.....	.....	.....	.....		
$x_{n-2} - x_{n-1} = a_{n-2,n-1}$	$x_{n-2} - x_n = a_{n-2,n}$	$x_{n-2} - x_{n+1} = a_{n-2,n+1}$	.....		
$x_{n-1} - x_n = a_{n-1,n}$	$x_{n-1} - x_{n+1} = a_{n-1,n+1}$				
$x_n - x_{n+1} = a_{n,n+1}$					
s_n	s_{n-1}	s_{n-2}	.....	s_3	s_2
$2\frac{s_n}{n}$	$2\frac{s_{n-1}}{n-1}$	$2\frac{s_{n-2}}{n-2}$	.....	$2\frac{s_3}{3}$	$2\frac{s_2}{2}$
Σ_n	Σ_{n-1}	Σ_{n-2}	.....		

Les sommes des colonnes fournissent les équations

$$(3)\quad \begin{cases} s_n = n\lambda_n + x_1 - x_{n+1}, \\ s_{n-1} = (n-1)\lambda_{n-1} + (x_1 + x_2) - (x_n + x_{n+1}), \\ s_{n-2} = (n-2)\lambda_{n-2} + (x_1 + x_2 + x_3) - (x_{n-1} + x_n + x_{n+1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ s_3 = 3\lambda_3 + (x_1 + x_2 + x_3) - (x_{n-1} + x_n + x_{n+1}), \\ s_2 = 2\lambda_2 + (x_1 + x_2) - (x_n + x_{n+1}). \end{cases}$$

Les s désignent, dans chaque colonne, la somme des termes connus.

Divisons chacune de ces équations par le coefficient de λ, qui est égal à son indice, et multiplions par 2; additionnons ensuite les équations équidistantes des extrêmes, en introduisant l'équation en λ_1. Nous aurons

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma_n = 2\dfrac{s_n}{n}, \\ \Sigma_{n-1} = 2\left(\dfrac{s_{n-1}}{n-1} + \dfrac{s_2}{2}\right), \\ \Sigma_{n-2} = 2\left(\dfrac{s_{n-2}}{n-2} + \dfrac{s_3}{3}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

chacune de ces équations est de la forme

$$(4)'\quad 2(\lambda_i + \lambda_{n-i+1}) = \Sigma_{n-i+1} + 2\frac{n+1}{i(n-i+1)}(Q_{n+1} + Q_n + \dots + Q_{n-i+2}).$$

Ces équations seront utilisées plus tard.

La marche du calcul est indiquée dans le Tableau I.

2° *Équations relatives aux x.* — Inscrivons, sur une même ligne horizontale, les équations qui se trouvent dans la même colonne du Tableau I, de telle sorte que toutes les équations contenant un x positif donné se trouvent dans la même colonne verticale. Portons ensuite, dans ce Tableau, les mêmes équations changées de signe, de telle sorte que les x négatifs se trouvent maintenant affectés du coefficient $+1$, à la suite des x positifs de même indice. En posant, pour la symétrie de la notation,

$$a_{ik} = -a_{ki},$$

et en inscrivant en tête des colonnes chaque x commun à toutes les équations, nous formerons le second Tableau.

Tableau II. — Équations relatives aux x.

Calcul des t, S, D, P et R.

x_1	x_2	x_3	.....	x_n	x_{n+1}
$-x_2 + \lambda_n = a_{1,2}$	$-x_3 + \lambda_n = a_{2,3}$	$-x_4 + \lambda_n = a_{3,4}$	.....	$-x_{n+1} + \lambda_n = a_{n,n+1}$	
$-x_3 + \lambda_{n-1} = a_{1,3}$	$-x_4 + \lambda_{n-1} = a_{2,4}$	$-x_5 + \lambda_{n-1} = a_{3,5}$	.....	$-x_1 - \lambda_2 = a_{n,1}$	$-x_2 - \lambda_3 = a_{n+1,2}$
$-x_4 + \lambda_{n-2} = a_{1,4}$	$-x_5 + \lambda_{n-2} = a_{2,5}$	$-x_6 + \lambda_{n-2} = a_{3,6}$	.....	$-x_2 - \lambda_3 = a_{n,2}$	$-x_3 - \lambda_3 = a_{n+1,3}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$-x_{n-1} + \lambda_2 = a_{1,n-1}$	$-x_n + \lambda_2 = a_{2,n}$	$-x_{n+1} + \lambda_2 = a_{3,n-1}$	.....	$-x_{n-3} - \lambda_{n-3} = a_{n,n-3}$	$-x_{n-2} - \lambda_{n-2} = a_{n+1,n-2}$
$-x_n + \lambda_2 = a_{1,n}$	$-x_{n+1} + \lambda_2 = a_{2,n+1}$	$-x_1 - \lambda_{n-1} = a_{3,1}$	.....	$-x_{n-2} - \lambda_{n-1} = a_{n,n-2}$	$-x_{n-1} - \lambda_{n-1} = a_{n+1,n-1}$
	$-x_1 - \lambda_n = a_{2,1}$	$-x_2 - \lambda_n = a_{3,2}$	....	$-x_{n-1} - \lambda_n = a_{n,n-1}$	$-x_n - \lambda_n = a_{n+1,n}$
t_1	t_2	t_3	.....	t_n	t_{n+1}
$S_{n+1} = t_1 + t_{n+1}$	$S_n = t_2 + t_n$	$S_{n-1} = t_3 + t_{n-1}$	.....	$D_n = t_n - t_2$	$D_{n+1} = t_{n+1} - t_1$
	$S_n - S_{n+1}$	$S_{n-1} - S_{n+1}$	$D_{n-1} - D_n$	$D_n - D_{n+1}$	
P_{n+1}	P_n	P_{n-1}	$-\Sigma_{n-1}$	$-\Sigma_n$	
			$(n+1)R_{n-1}$	$(n+1)R_n$	
			R_{n-1}	R_n	

Désignons par $t_1, \ldots, t_{n+1}$ les sommes des termes connus dans chaque colonne; ces quantités forment le membre de droite des équations normales relatives aux x.

Les équations normales sont maintenant au nombre de $2n$; mais elles se réduisent à $2n-2$ équations indépendantes; il existe, en effet, entre elles les deux relations suivantes, qui servent de vérification

$$(5)\quad \begin{cases} t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{n+1}=0, \\ nt_1+(n-2)t_2+(n-4)t_3+\ldots \\ \qquad -(n-4)t_{n-1}-(n-2)t_n-nt_{n+1} \\ \qquad =2[s_n+2s_{n-1}+3s_{n-2}+\ldots+(n-2)s_3+(n-1)s_2]. \end{cases}$$

Posons $\sum_1^{n+1} x_i = X$, et formons les sommes et les différences des équations normales prises deux à deux à égale distance des extrêmes; en introduisant les symboles S et D inscrits dans le Tableau, nous aurons

$$(6)\quad \begin{cases} S_{n+1}=(n+1)P_{n+1}-2X, \\ S_n \quad =(n+1)P_n \quad -2X, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} D_{n+1}=(n+1)Q_{n+1}-2(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n), \\ D_n \quad =(n+1)Q_n \quad -2(\lambda_2+\qquad\ldots+\lambda_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le dernier S est égal au double du t moyen, si n est pair.

Tirons, de la première des équations (6), la valeur de $2X$, et substituons dans les suivantes; nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} P_n \quad = P_{n+1}+\dfrac{1}{n+1}(S_n \quad -S_{n+1}), \\ P_{n-1}=P_{n+1}+\dfrac{1}{n+1}(S_{n-1}-S_{n+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

P_{n+1} étant donné, nous tirerons de là la valeur de tous les autres P. Les différences des S, et les P sont inscrits dans le Tableau à la place qu'ils occupent dans le calcul. On vérifiera ce dernier calcul par une des relations suivantes déduites de la première

des équations (6), et d'autres relations précédentes

$$(9)\quad \begin{cases} P_{n+1} + P_n + \ldots + P_{\frac{n}{2}+2} + \frac{1}{2} P_{\frac{n}{2}+1} \\ \quad = X = \frac{n+1}{2} P_{n+1} - \frac{1}{2} S_{n+1}, \\ P_{n+1} + P_n + \ldots + P_{\frac{n+3}{2}} \\ \quad = X = \frac{n+1}{2} P_{n+1} - \frac{1}{2} S_{n+1}, \end{cases}$$

pour n pair ou impair.

Retranchons chacune des équations (7) de la précédente, et introduisons les valeurs de λ données par les équations contenues dans (4'); posons, pour abréger,

$$(10)\quad \begin{cases} R_n = \frac{1}{n+1} (D_n - D_{n+1} - \Sigma_n), \\ R_{n-1} = \frac{1}{n+1} (D_{n-1} - D_n - \Sigma_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

nous aurons enfin

$$(11)\quad \begin{cases} Q_n = R_n + Q_{n+1} - \frac{2}{1.n} Q_{n+1}, \\ Q_{n-1} = R_{n-1} + Q_n - \frac{2}{2(n-1)} (Q_{n+1} + Q_n), \\ Q_{n-2} = R_{n-2} + Q_{n-1} - \frac{2}{3(n-2)} (Q_{n+1} + Q_n + Q_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ce système récurrent fournit les valeurs des quantités Q. Le calcul des R est indiqué dans le Tableau II. Connaissant les P et les Q, nous trouverons les x à l'aide des équations (2).

Après avoir résolu les équations (11), on peut vérifier le résultat à l'aide des relations suivantes :

Pour n pair,

$$Q_{\frac{n}{2}+1} = 0;$$

Pour n impair,

$$Q_{\frac{n+3}{2}} - \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} Q - \frac{1}{n+1} \left(\frac{4 s_{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + t_{\frac{n+3}{2}} - t_{\frac{n+1}{2}} \right) = 0.$$

Pour faciliter le calcul des équations (11), nous donnerons ci-après la série des dénominateurs des fractions du second membre, le numérateur de chacune d'elles étant 2.

n.	Dénominateurs.									
3.....	3									
4.....	4	6								
5.....	5	8								
6.....	6	10	12							
7.....	7	12	15							
8.....	8	14	18	20						
9.....	9	16	21	24						
10.....	10	18	24	28	30					
11.....	11	20	27	32	35					
12.....	12	22	30	36	40	42				
13.....	13	24	33	40	45	48				
14.....	14	26	36	44	50	54	56			
15.....	15	28	39	48	55	60	63			
16.....	16	30	42	52	60	66	70	72		
17.....	17	32	45	56	65	72	77	80		
18.....	18	34	48	60	70	78	84	88	90	
19	19	36	51	64	75	84	91	96	99	
20.....	20	38	54	68	80	90	98	104	108	110
21.....	21	40	57	72	85	96	105	112	117	120

Il nous reste à calculer les λ [1]; nous emploierons, pour cela, les relations (3), que nous écrirons sous la forme

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{1}{n}(s_n + Q_{n+1}),\\
\lambda_{n-1} &= \frac{1}{n-1}(s_{n-1} + Q_{n+1} + Q_n),\\
\lambda_{n-2} &= \frac{1}{n-2}(s_{n-2} + Q_{n+1} + Q_n + Q_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_3 &= \frac{1}{3}(s_3 + Q_{n+1} + Q_n + Q_{n-1}),\\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}(s_2 + Q_{n+1} + Q_n).
\end{aligned}\right.$$

[1] Dans un calibrage, les quantités λ n'ont qu'un intérêt passager, puisqu'ils se rapportent à une colonne de mercure dont on modifie la longueur aussitôt les observations terminées. Dans l'étude de la division d'une règle au moyen du

29. Erreurs résiduelles et erreurs probables des inconnues. — En introduisant, dans l'équation de condition, les valeurs correspondantes des inconnues x et λ, nous formerons un Tableau ordonné d'une façon identique au Tableau I, mais dans lequel les quantités a_{ik} observées auront été remplacées par les valeurs calculées, plus voisines de la vérité. La comparaison des deux Tableaux donnera les erreurs résiduelles Δ. Comme vérification, la somme des erreurs résiduelles de chaque colonne doit être nulle.

Désignons par $[\Delta\Delta]$ la somme des carrés des erreurs résiduelles; l'erreur probable d'une observation sera

$$r = 0{,}6745\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{\frac{(n+2)(n-1)}{2}-(2n-2)}} = 0{,}6745\sqrt{\frac{2[\Delta\Delta]}{(n-1)(n-2)}}.$$

Erreurs probables des x. — L'erreur probable d'une inconnue x_k se détermine, d'après un théorème connu, en multipliant r par la racine carrée du coefficient de t_k dans la résolution des équations normales en s et t par rapport à x_k. Soit A_k ce coefficient,

$$r(x_k) = r\sqrt{A_k},$$

les erreurs probables de x_1 et x_{n+1} étant supposées nulles. Si ces quantités sont affectées elles-mêmes d'erreurs probables, on aura

$$r'(x_k) = \sqrt{[r(x_k)]^2 + \left[\frac{n-k}{n}r(x_1)\right]^2 + \left[\frac{k}{n}r(x_{n+1})\right]^2}.$$

Remarquant d'abord que les s n'ont aucune influence sur le coefficient de t_k dans la résolution des équations par rapport à x, on les annule. Les identités (5) deviennent alors des équations respectivement entre les S et les D, qui permettent d'éliminer S_{n+1} et D_{n+1} des valeurs de x. On calcule ensuite séparément les coefficients F_k et G_k de t_k dans les développements respectifs de P_k et Q_k; A_k s'en déduit par la relation

$$A_k = \frac{1}{2}(F_k + G_k).$$

---

comparateur, au contraire, les λ sont définis par la distance de deux traits que l'on prend comme terme de comparaison; ils fournissent ainsi de nouvelles relations entre les corrections.

En utilisant les équations d'où sont tirés les P et la valeur de S_{n+1} fournie par la première des équations (5), on trouve, pour tous les points,

$$F_k = \frac{2}{n+1},$$

à l'exception du point défini par n pair et $k = \frac{n}{2} + 1$; pour ce point, $x = \frac{P}{2}$ et

$$F_{\frac{n}{2}+1} = \frac{3}{n+1}.$$

Pour trouver les G, on utilise le système récurrent qui fournit les quantités Q; on en élimine D_{n+1}, la valeur de cette quantité ayant été précédemment exprimée en fonction des autres D; on simplifie les équations en supprimant les Σ, et l'on obtient

$$\begin{aligned}
-G_2 = G_n &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{n-2}{n}\right),\\
-G_3 = G_{n-1} &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{n-4}{n}U_2\right),\\
-G_4 = G_{n-2} &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{n-6}{n}U_3\right),\\
-G_5 = G_{n-3} &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{n-8}{n}U_4\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
U_2 &= 1 - \frac{2}{2(n-1)},\\
U_3 &= U_2 - \frac{2}{3(n-2)}(1 + U_2),\\
U_4 &= U_3 - \frac{2}{4(n-2)}(1 + U_2 + U_3).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
A_n &= A_2 = \frac{1}{2(n+1)}\left(3 + \frac{n-2}{n}\right),\\
A_{n-1} &= A_3 = \frac{1}{2(n+1)}\left(3 + \frac{n-4}{n}U_2\right),\\
A_{n-2} &= A_4 = \frac{1}{2(n+1)}\left(3 + \frac{n-6}{n}U_3\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_{\frac{n}{2}+1} &= \frac{3}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

si n est pair;

$$A_{\frac{n+3}{2}} = \frac{1}{2(n+1)}\left(3 + \frac{1}{n} U_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

si n est impair.

Erreurs probables des λ. — Si l'on désigne par B_k le coefficient de s_k dans la résolution des équations normales des deux systèmes par rapport à λ_k, on aura

$$r(\lambda_k) = r\sqrt{B_k}.$$

En suivant une méthode analogue à celle qui vient d'être décrite, on pose les quantités $t_2, t_3, \ldots, t_n$ égales à zéro. Dans la seconde des identités (5), tous les D disparaissent, à l'exception de D_{n+1}. On calcule les R d'après (4) et (10), puis les Q d'après (4) et (11), et enfin les λ.

Si l'on pose

$$W_n = \frac{2}{n}(1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n),$$

on aura

$$B_n = \frac{1}{n},$$

$$B_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{2}{n+1} W_1\right), \qquad B_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-1}{n+1} W_1\right),$$

$$B_{n-2} = \frac{1}{n-2}\left(1 + \frac{3}{n+1} W_2\right), \qquad B_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{n-2}{n+1} W_2\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le Tableau suivant contient, pour $n = 2, 3, \ldots, 20, 21$, la série des nombres qui, multipliés par r, donnent les erreurs probables des x indiqués dans la première colonne [1] :

---

[1] Ces nombres sont empruntés en partie au Mémoire de M. Broch (p. 31) et en partie à un Mémoire de M. Pernet, *Comparaisons des mètres dans l'air*, etc. (*T. et M.*, t. IV, p. 32; 1885).

$n =$	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
x_2 et x_n.....	0,707	0,645	0,592	0,548	0,512	0,482	0,456
3 » $n-1$...			0,548	0,512	0,483	0,458	0,436
4 » $n-2$...					0,463	0,439	0,419
5 » $n-3$...							0,408

$n =$	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
x_2 et x_n.....	0,435	0,416	0,399	0,384	0,371	0,359	0,348
3 » $n-1$...	0,418	0,401	0,387	0,372	0,360	0,349	0,339
4 » $n-2$...	0,402	0,387	0,372	0,361	0,350	0,340	0,331
5 » $n-3$...	0,391	0,376	0,363	0,351	0,341	0,331	0,323
6 » $n-4$...		0,369	0,356	0,344	0,334	0,324	0,316
7 » $n-5$...				0,340	0,329	0,319	0,311
8 » $n-6$...						0,316	0,307

$n =$	16.	17.	18.	19.	20.	21.
x_2 et x_n.....	0,338	0,328	0,320	0,312	0,305	0,298
3 » $n-1$...	0,330	0,321	0,313	0,306	0,299	0,293
4 » $n-2$...	0,322	0,314	0,307	0,300	0,293	0,287
5 » $n-3$...	0,315	0,307	0,300	0,294	0,288	0,282
6 » $n-4$...	0,308	0,301	0,294	0,288	0,283	0,277
7 » $n-5$...	0,303	0,296	0,290	0,284	0,278	0,273
8 » $n-6$...	0,299	0,292	0,286	0,280	0,274	0,269
9 » $n-7$...	0,297	0,288	0,283	0,277	0,271	0,266
10 » $n-8$...			0,281	0,274	0,269	0,263
11 » $n-9$...					0,267	0,262

Nous ne donnerons pas le Tableau, moins important, relatif aux λ. Pour chaque valeur de n, le coefficient est d'autant plus faible que la colonne est plus courte. Pour $n = 20$, le facteur de la colonne la plus courte est 0,223.

28. Exemple. — Nous appliquerons les formules qui viennent d'être développées à un exemple numérique. Les données qui suivent sont empruntées au dossier du thermomètre Tonnelot n° **4340**; le calibrage a été fait de 2 en 2 degrés pour une série de sections de 10 degrés, prolongées de part et d'autre de 2 degrés. La section en question s'étend de 28° à 42°.

Tableau I. — Calcul des s et Σ.

L'unité est le dix-millième de degré.

λ_1.		λ_2.		λ_3.		λ_4.		λ_5.		λ_6.	
$x_1 - x_2$	−350	$x_1 - x_3$	−325	$x_1 - x_4$	−250	$x_1 - x_5$	−445	$x_1 - x_6$	−300	$x_1 - x_7$	− 90
$x_2 - x_3$	−275	$x_2 - x_4$	−160	$x_2 - x_5$	− 20	$x_2 - x_6$	−200	$x_2 - x_7$	+100	$x_2 - x_8$	+345
$x_3 - x_4$	−195	$x_3 - x_5$	0	$x_3 - x_6$	+180	$x_3 - x_7$	+115	$x_3 - x_8$	+430		
$x_4 - x_5$	−110	$x_4 - x_6$	+100	$x_4 - x_7$	+395	$x_4 - x_8$	+395				
$x_5 - x_6$	−105	$x_5 - x_7$	+240	$x_5 - x_8$	+560						
$x_6 - x_7$	+ 15	$x_6 - x_8$	+400								
$x_7 - x_8$	+ 85										
$s_i =$	−935		+255		+865		−135		+230		+255
$\frac{s_i}{i} =$	−133,57				+173,00				+ 76,67		
$\frac{2s_i}{i} =$	−267,14		+ 85		+346,00		− 67,50		+153,33		+255
$\Sigma =$	−267,14		+ 340,00		+499,33						

Tableau II. — Calcul des t, S, D, P et R.

	x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	x_8.	
	− 350	− 275	− 195	− 110	− 105	+ 15	+ 85	− 85	
	− 325	− 160	0	+ 100	+ 240	+ 400	− 15	− 400	
	− 250	− 20	+ 180	+ 395	+ 560	+ 105	− 240	− 560	
	− 445	− 200	+ 115	+ 395	+ 110	− 100	− 395	− 395	
	− 300	+ 100	+ 430	+ 195	0	− 180	− 115	− 430	
	− 90	+ 345	+ 275	+ 160	+ 20	+ 200	− 100	− 345	
		+ 350	+ 325	+ 250	+ 445	+ 300	+ 90		
$t_i =$	−1760	+ 140	+1130	+1385	+1270	+ 740	− 690	−2215	
S,	−3975	− 550	+1870	+ 2655	− 115	− 390	− 830	− 455	D_i
$S_i - S_i$		+3425	+5845	+6630	+275,00	+440,00	−375,00		$D_i - D_{i+1}$
					−499,33	−340,00	+267,14		$-\Sigma$
					−224,33	+100,00	−107,86		
$P_8 = 0.$		P_7		P_6	P_5	R_5	R_6	R_7	
		+ 428,12;		+ 730,62;	+ 828,75.	− 28,04;	+ 12,50;	− 13,48.	

Le second Tableau nous a donné les P, en supposant $P_8 = 0$; nous en avons aussi tiré les R, qui serviront à calculer les Q. Posons de même $Q_8 = 0$, et désignons par p le facteur numérique qui se trouve devant la parenthèse dans les équations (11). Dans le cas actuel, $n = 7$, et les facteurs sont $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{2}{15}$. On reconnaîtra aisément, dans le Tableau suivant, le calcul indiqué par la forme des équations (11). On commence par poser, dans la première colonne, la valeur de Q_8, et dans la quatrième les R; on calcule alors le premier nombre de la dernière colonne, puis le second de la première, et ainsi de suite, conformément aux titres des colonnes.

TABLEAU III. — CALCUL DES Q.

Q.	ΣQ.	$p\Sigma Q$.	R.	$-p\Sigma Q+R$.
$Q_8 = 0,00$	0,00	0,00	$R_7 = -13,48$	$-13,48$
$Q_7 = -13,48$	$-13,48$	$-2,25$	$R_6 = +12,50$	$-14,75$
$Q_6 = -1,27$	$-12,21$	$-1,63$	$R_5 = -28,04$	$-26,41$
$Q_5 = -25,14$	$-37,35$			

Les équations (2) nous donnent maintenant les corrections suivantes :

Points.	Corrections.
28	$x_1 = 0,00$
30	$x_2 = +220,80$
32	$x_3 = +364,67$
34	$x_4 = +426,94$
36	$x_5 = +401,80$
38	$x_6 = +365,94$
40	$x_7 = +207,32$
42	$x_8 = 0,00$

D'après les équations (3'), nous calculerons les λ comme il suit :

Calcul des λ.

$s_7 = -935,$		$\lambda_7 = -133,57,$
$s_6 = +255,$	$Q_7 = -13,48,$	$\lambda_6 = +40,25,$
$s_5 = +865,$	$Q_7 + Q_6 = -12,21,$	$\lambda_5 = +170,56,$
$s_4 = -135,$	$Q_7 + Q_6 + Q_5 = -37,35,$	$\lambda_4 = -43,09,$
$s_3 = +230,$		$\lambda_3 = +72,60,$
$s_2 = +255,$		$\lambda_2 = +120,76.$

En substituant maintenant les valeurs des inconnues dans les équations de condition et en comparant le Tableau ainsi obtenu avec le Tableau I, on obtient les résultats suivants :

TABLEAU IV. — SUBSTITUTION DES INCONNUES, ET ERREURS RÉSIDUELLES.

Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.
−354	+ 4	−324	− 1	−256	+ 6	−445	0	−293	− 7	− 87	− 3
−277	+ 2	−166	+ 6	− 10	−10	−188	−12	+ 86	+14	+342	+ 3
−196	+ 1	+ 3	− 3	+169	+11	+114	+ 1	+437	− 7		
−108	− 2	+101	− 1	+390	+ 5	+384	+11				
− 98	− 7	+235	+ 5	+572	−12						
+ 25	−10	+406	− 6								
+ 74	+11										

Nous trouvons successivement, l'unité étant toujours le dix-millième de degré,

$$[\Delta\Delta] = 1407,$$
$$r = \pm 6,53,$$
$$r(x_2) = r(x_7) = \pm 3,15,$$
$$r(x_3) = r(x_6) = \pm 2,99,$$
$$r(x_4) = r(x_5) = \pm 2,87.$$

30. Résolution par la méthode Neumann-Thiesen. — Dans cette méthode, on substitue au système primitif d'équations de condition un système plus simple, d'où les λ ont été éliminés par soustraction des équations de condition successives, obtenues avec une même colonne.

Dans le système des équations de condition du calibrage complet, retranchons chaque équation de la suivante; écrivons en diagonale, du haut à gauche au bas à droite, les nouvelles équations fournies par une même colonne; complétons ensuite le carré, en inscrivant sur la diagonale principale l'identité $0 = 0$, et en répétant, dans la $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale, les équations changées de signe de la $i^{\text{ième}}$ colonne; nous obtiendrons un Tableau dont les deux premières colonnes sont

$$\begin{array}{r|r}
0 = 0, & -x_2 + x_1 + x_3 - x_2 = -a_{2,3} + a_{1,2}, \\
-x_1 + x_2 + x_2 - x_3 = a_{2,3} - a_{1,2}, & 0 = 0, \\
-x_1 + x_3 + x_2 - x_4 = a_{2,4} - a_{1,3}, & -x_2 + x_3 + x_3 - x_4 = a_{3,4} - a_{2,3}, \\
-x_1 + x_4 + x_2 - x_5 = a_{2,5} - a_{1,4}, & -x_2 + x_4 + x_3 - x_5 = a_{3,5} - a_{2,4}, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
-x_1 + x_n + x_2 - x_{n+1} = a_{2,n+1} - a_{1,n}; & -x_2 + x_n + x_3 - x_{n+1} = a_{3,n+1} - a_{2,n}.
\end{array}$$

Adoptons le symbole $a_{ik} = -a_{ki}$, d'où $a_{ii} = 0$, et rassemblons en tête de chaque ligne et de chaque colonne les quantités $-x_i + x_{i+1}$ communes à toutes les équations d'une même ligne ou d'une même colonne; nous pourrons écrire le système parfaitement symétrique et homogène suivant :

TABLEAU I. — FORMATION DES ÉQUATIONS NORMALES.

Calcul des A *et* $\frac{1}{n}$A.

	$-x_1 + x_2$	$-x_2 + x_3$	$-x_3 + x_4$	...	$-x_n + x_{n+1}$
$+x_1 - x_2$	$a_{1,2} \quad -a_{1,1}$	$a_{2,2} \quad -a_{2,1}$	$a_{3,2} \quad -a_{3,1}$	...	$a_{n+1,2} \quad -a_{n,1}$
$+x_2 - x_3$	$a_{2,3} \quad -a_{1,2}$	$a_{3,3} \quad -a_{2,2}$	$a_{4,3} \quad -a_{3,2}$	...	$a_{n+1,3} \quad -a_{n,2}$
$+x_3 - x_4$	$a_{2,4} \quad -a_{1,3}$	$a_{3,4} \quad -a_{2,3}$	$a_{4,4} \quad -a_{3,3}$	...	$a_{n+1,4} \quad -a_{n,3}$
$+x_4 - x_5$	$a_{2,5} \quad -a_{1,4}$	$a_{3,5} \quad -a_{2,4}$	$a_{4,5} \quad -a_{3,4}$	...	$a_{n+1,5} \quad -a_{n,4}$
.....	.....	.....	.....	...	.....
$+x_n - x_{n+1}$	$a_{1,n+1} \quad -a_{1,n}$	$a_{2,n+1} \quad -a_{2,n}$	$a_{3,n+1} \quad -a_{3,n}$	...	$a_{n+1,n+1} \quad -a_{n,n}$
	A_1	A_2	A_3	...	A_n
	$\frac{1}{n}A_1$	$\frac{1}{n}A_2$	$\frac{1}{n}A_3$	...	$\frac{1}{n}A_n$

Faisons la somme de chaque colonne verticale; nous obtiendrons les équations normales relatives à chacun des x. Nous serons ainsi conduits au système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} n(x_2 - x_1\quad) + x_1 - x_{n+1} = +A_1; \\ n(x_3 - x_2\quad) + x_1 - x_{n+1} = +A_2; \\ n(x_4 - x_3\quad) + x_1 - x_{n+1} = +A_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ n(x_n - x_{n-1}) + x_1 - x_{n+1} = +A_n; \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 \quad = x_1 + \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) + \frac{1}{n} A_1; \\ x_3 \quad = x_2 + \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) + \frac{1}{n} A_2; \\ x_4 \quad = x_3 + \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) + \frac{1}{n} A_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) + \frac{1}{n} A_n. \end{array}\right.$$

La dernière équation doit être satisfaite identiquement.

C'est au moyen du dernier système d'équations que l'on calculera la valeur de toutes les corrections, les extrêmes étant données. On pourrait aussi donner deux autres corrections, et établir un système récurrent un peu différent.

Nous avons donné un développement complet du calcul, pour montrer qu'à partir des équations différences la méthode des moindres carrés est strictement suivie; mais on peut trouver le principe de la méthode par un raisonnement élémentaire.

Au moyen de la colonne de longueur 1, nous comparons entre eux les intervalles successifs; nous trouvons que cette colonne est trop longue de $a_{1,2}$ dans le premier intervalle, et de $a_{2,3}$ dans le second; par conséquent, le premier intervalle surpasse le second de $a_{2,3} - a_{1,2}$. La colonne de longueur 2 servira à comparer les intervalles qui en comprennent un entre eux; nous trouverons ainsi que le premier surpasse le troisième de $a_{2,4} - a_{1,3}$, le second étant commun aux deux positions de la colonne. Nous pourrons

poser ainsi la suite des équations de condition

$$\begin{array}{lll} \text{Intervalle}\,[1\cdot2] = & \text{Intervalle}\,[2\cdot3] + a_{2,3} - a_{1,2}, \\ \quad\text{»}\quad [1\cdot2] = & \quad\text{»}\quad [3\cdot4] + a_{2,4} - a_{1,3}, \\ \quad\text{»}\quad [1\cdot2] = & \quad\text{»}\quad [4\cdot5] + a_{2,5} - a_{1,4}, \\ \quad\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En mettant en tête l'identité

$$\text{Intervalle}\,[1\cdot2] = \text{Intervalle}\,[1\cdot2] + 0,$$

nous obtiendrons la première colonne, et ainsi de suite. Remarquons que, dans chaque ligne et dans chaque colonne, le même intervalle se trouve comparé successivement à tous les autres.

On peut souvent découvrir les erreurs d'écriture, ou les grosses erreurs d'observation, avant d'avoir terminé le calcul. Il suffit, pour cela, de remarquer que les différences entre les deux nombres de chaque ligne qui se correspondent dans deux colonnes différentes sont algébriquement égales. Ces quantités ne doivent donc différer que dans les limites des erreurs d'observation.

31. Erreurs résiduelles et erreurs probables. — En formant les différences deux à deux des équations d'où nous avons tiré les corrections et en faisant passer les x à gauche, nous voyons que le premier membre a la forme du premier membre des équations du Tableau I; le second membre est formé par les différences de deux quantités $\frac{1}{n}$A. Chaque équation contenant en même temps une de ces quantités et la différence des x inscrite en tête de la même colonne, on obtiendra les quantités *calculées* correspondant aux nombres du Tableau, en formant, pour chaque colonne, la différence entre le $\frac{1}{n}$ A correspondant et tous les nombres analogues. Les mêmes erreurs résiduelles se répétent, avec signes contraires, sur les deux moitiés du Tableau ; il est cependant utile de les écrires toutes, car on vérifie tout le calcul, en constatant que, dans chaque ligne ou chaque colonne, la somme des erreurs résiduelles est nulle.

Les erreurs résiduelles Δ étant connues, on trouvera, d'après

M. Thiesen, l'erreur probable d'une observation par la formule

$$r = 0{,}6745\sqrt{\frac{n[\Delta\Delta]}{(n-2)(n^2-n-2)}},$$

le symbole $[\Delta\Delta]$ désignant la somme des carrés des erreurs résiduelles d'une moitié du Tableau [1].

L'erreur probable est la même pour toutes les corrections; pour une division en n parties, elle est égale à

$$r(x) = r\sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2}} = r\pi_n.$$

Nous donnerons ici la valeur des facteurs constants qui entrent dans le calcul des erreurs probables :

n.	$\frac{0{,}6745\sqrt{n}}{\sqrt{(n-2)(n^2-n-2)}}$.	π_n.	n.	$\frac{0{,}6745\sqrt{n}}{\sqrt{(n-2)(n^2-n-2)}}$.	π_n.
2.....	»	0,707	12.....	0,0648	0,391
3.....	0,5841	0,667	13.....	0,0591	0,377
4.....	0,3016	0,612	14.....	0,0543	0,364
5.....	0,2052	0,566	15.....	0,0503	0,353
6.....	0,1561	0,527	16.....	0,0467	0,342
7.....	0,1262	0,495	17.....	0,0437	0,333
8.....	0,1060	0,468	18.....	0,0410	0,324
9.....	0,0914	0,444	19.....	0,0486	0,316
10.....	0,0804	0,424	20.....	0,0366	0,308
11.....	0,0718	0,407	21.....	0,0347	0,301

32. Exemple. — Nous appliquerons la méthode Neumann-Thiesen à l'exemple numérique traité par la méthode des moindres carrés. Nous inscrirons en tête de chaque colonne et de chaque ligne l'intervalle commun. La première équation non identique du Tableau (seconde de la première colonne ou première de la seconde) signifiera : dans la première colonne

$$[28\cdot 30] = [30\cdot 32] + 75,$$

et dans la seconde

$$[30\cdot 32] = [28\cdot 30] - 75.$$

[1] PERNET, *Travaux et Mémoires*, t. IV, p. 31.

En conservant comme unité le dix-millième de degré, nous trouverons les quantités A et $\frac{1}{n}$ A par le calcul suivant :

CALCUL DES A ET $\frac{1}{7}$ A.

	[28·30] =	[30·32] =	[32·34] =	[34·36] =	[36·38] =	[38·40] =	[40·42] =
[28·30]	0	− 75	− 165	− 230	− 245	− 400	− 435
[30·32]	+ 75	0	− 80	− 160	− 200	− 315	− 330
[32·34]	+ 165	+ 80	0	− 85	− 100	− 215	− 280
[34·36]	+ 230	+ 160	+ 85	0	− 5	− 140	− 165
[36·38]	+ 245	+ 200	+ 100	+ 5	0	− 120	− 160
[38·40]	+ 400	+ 315	+ 215	+ 140	+ 120	0	− 70
[40·42]	+ 435	+ 330	+ 280	+ 165	+ 160	+ 70	0
$A_i =$	+1550	+1010	+ 435	− 165	− 270	−1120	−1440
$\frac{1}{7} A_i =$	+ 221,43	+ 144,29	+ 62,14	− 23,57	− 38,57	− 160,00	− 205,72

Admettons $x_1 = 0$, $x_8 = 0$.

En additionnant successivement les nombres de la dernière ligne, on trouve les corrections de calibre des points 30 à 40.

Nous reproduirons, pour faciliter la comparaison, les corrections trouvées précédemment.

Divisions.		Corrections. Méthode Neumann-Thiesen.	Corrections. Méthode des moindres carrés.
28.....	$x_1 =$	0,0	0,0
30.....	$x_2 =$	+ 221,4	+ 220,8
32.....	$x_3 =$	+ 365,7	+ 364,7
34.....	$x_4 =$	+ 427,9	+ 426,9
36.....	$x_5 =$	+ 404,3	+ 401,8
38.....	$x_6 =$	+ 365,7	+ 365,9
40.....	$x_7 =$	+ 205,7	+ 207,3
42.....	$x_8 =$	+ 0,0	0,0

Les différences n'atteignent pas 3 dix-millièmes de degré.

En calculant les corrections par la méthode de Gay-Lussac, au

moyen des observations faites avec la colonne de 2 degrés, on trouve :

Divisions.		Corrections.
28.....	$x_1 =$	0,0
30.....	$x_2 =$	+ 216,4
32.....	$x_3 =$	+ 357,8
34.....	$x_4 =$	+ 419,2
36.....	$x_5 =$	+ 395,6
38.....	$x_6 =$	+ 367,0
40.....	$x_7 =$	+ 218,4
42.....	$x_8 =$	0,0

Les différences sont encore très faibles (¹).

En introduisant, dans les équations du Tableau I (30) (p. 68) les valeurs *calculées* des inconnues et en comparant ces dernières avec les nombres donnés par l'observation, on obtient le Tableau suivant :

SUBSTITUTION DES INCONNUES ET ERREURS RÉSIDUELLES.

Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.	Calc.	Δ.
0	»	− 77	+ 2	−159	− 6	−245	+15	−260	+15	−381	−19	−427	− 8
+ 77	− 2	0	»	− 82	+ 2	−168	+ 8	−183	−17	−304	−11	−350	+20
+159	+ 6	+ 82	− 2	0	»	− 86	+ 1	−101	+ 1	−222	+ 7	−268	−12
+245	−15	+168	− 8	+ 86	− 1	0	»	− 15	+10	−136	− 4	−182	+17
+260	−15	+183	+17	+101	− 1	+ 15	−10	0	»	−121	+ 1	−167	+ 7
+381	+19	+304	+11	+222	− 7	+136	+ 4	+121	− 1	0	»	− 46	−24
+427	+ 8	+350	−20	+268	+12	+182	−17	+167	− 7	+ 46	+24	0	»

On en tire

$$[\Delta\Delta] = 3019,$$

$$\sqrt{[\Delta\Delta]} = 54,95,$$

$$r = \pm 6,93,$$

$$r(x) = \pm 3,43.$$

(¹) Il ne faudrait pas en conclure que l'on obtient, en moyenne, une précision de 0,001 degré par la méthode de Gay-Lussac; il faut remarquer, en effet, que le

Ces derniers résultats sont très voisins de ceux qui ont été trouvés par la méthode des moindres carrés.

33. **Calibrage abrégé.** — Lorsqu'on veut réduire le travail très considérable que nécessite un calibrage complet pour des points rapprochés, deux moyens se présentent : on peut espacer davantage les points principaux du calibrage complet; ou, en conservant les mêmes intervalles, renoncer à employer toutes les colonnes.

Nous avons vu que les erreurs probables des corrections dans un calibrage complet peuvent être rendues inférieures à 0,0005 degré; or cette précision est souvent superflue. D'autre part, on reconnaît par l'examen minutieux des courbes des corrections de calibre que l'interpolation, toujours un peu arbitraire, laisse souvent subsister une incertitude beaucoup plus grande dans les corrections obtenues indirectement. On en conclura donc que, pour une somme égale de travail, il vaut mieux, dans certaines limites, rapprocher davantage les points principaux que de chercher à obtenir leurs corrections avec toute la précision qu'il est possible d'atteindre. Le calibrage doit cependant comprendre un nombre assez grand d'observations pour que celles-ci se contrôlent suffisamment. Il est difficile de poser des règles fixes pour les limites auxquelles il convient de s'arrêter dans l'une ou l'autre direction. L'expérience et le tact de l'observateur doivent le guider dans chaque cas particulier.

Le plus grand inconvénient d'un calibrage abrégé consiste en ce que, lorsqu'une partie des observations du calibrage complet sont supprimées, les formules perdent en simplicité et en généralité. Les coefficients doivent être calculés pour chaque subdivision, et, lorsqu'un nouveau cas se présente, il faut former et résoudre d'une manière générale toutes les équations normales.

M. Broch a calculé un schéma conforme à la méthode des moindres carrés pour le calibrage abrégé en dix parties, celui qui se présente le plus fréquemment; nous avons suivi la même marche

---

nombre des subdivisions est peu considérable. De plus, l'exemple développé a été pris, il est vrai, *au hasard,* mais dans un dossier d'un observateur très habile, opérant dans d'excellentes conditions.

pour la division en huit parties; nous développerons ici les formules qui conviennent à ces deux cas [1].

Les colonnes employées par M. Broch sont les trois colonnes moyennes, ayant les longueurs 4, 5 et 6 et fournissant respectivement 7, 6 et 5, soit dix-huit équations de condition. Les inconnues sont les neuf corrections x_2 à x_{10}, et les trois longueurs λ_7, λ_6 et λ_5, soit douze en tout.

Pour la division en huit parties, les colonnes 3, 4 et 5 fournissent quinze équations pour dix inconnues.

34. Division en dix parties. — Nous disposerons les équations dans deux Tableaux tels que les sommes des colonnes fournissent les équations normales relatives aux λ et aux x. Nous n'avons porté que les quantités connues dans les colonnes du second Tableau :

TABLEAU I. — CALCUL DES s ET Σ.

λ_7	λ_6	λ_5
$+x_1 - x_5 = a_{1,5}$	$+x_1 - x_6 = a_{1,6}$	$+x_1 - x_7 = a_{1,7}$
$+x_2 - x_6 = a_{2,6}$	$+x_2 - x_7 = a_{2,7}$	$+x_2 - x_8 = a_{2,8}$
$+x_3 - x_7 = a_{3,7}$	$+x_3 - x_8 = a_{3,8}$	$+x_3 - x_9 = a_{3,9}$
$+x_4 - x_8 = a_{4,8}$	$+x_4 - x_9 = a_{4,9}$	$+x_4 - x_{10} = a_{4,10}$
$+x_5 - x_9 = a_{5,9}$	$+x_5 - x_{10} = a_{5,10}$	$+x_5 - x_{11} = a_{5,11}$
$+x_6 - x_{10} = a_{6,10}$	$+x_6 - x_{11} = a_{6,11}$	
$+x_7 - x_{11} = a_{7,11}$		
s_7	s_6	s_5
$\frac{2s_7}{7}$	$\frac{2s_6}{6}$	$\frac{2s_5}{5}$

$$\Sigma_2 = \frac{2s_7}{7} + \frac{2s_6}{6} + \frac{2s_5}{5}; \qquad \Sigma_1 = \frac{2s_6}{6} + \frac{2s_5}{5}.$$

[1] Le procédé Neumann-Thiesen est aussi applicable à la formation des équations normales; mais la résolution de celles-ci est à très peu près aussi laborieuse que dans l'emploi de la méthode rigoureuse; de plus, les différences entre les corrections calculées par les deux méthodes peuvent devenir très sensibles. La méthode Neumann-Thiesen perdant, dans ce cas, son plus grand avantage, nous ne la développerons pas.

TABLEAU II. — CALCUL DES t, S, D, ET T.

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	x_8.	x_9.	x_{10}.	x_{11}.
$+a_{1,5}$	$+a_{2,6}$	$+a_{3,7}$	$+a_{4,8}$	$+a_{5,9}$	$+a_{6,10}$	$+a_{7,11}$				
$+a_{1,6}$	$+a_{2,7}$	$+a_{3,8}$	$+a_{4,9}$	$+a_{5,10}$	$+a_{6,11}$	$-a_{1,7}$	$-a_{2,8}$	$-a_{3,9}$	$-a_{4,10}$	$-a_{5,11}$
$+a_{1,7}$	$+a_{2,8}$	$+a_{3,9}$	$+a_{4,10}$	$+a_{5,11}$	$-a_{1,6}$	$-a_{2,7}$	$-a_{3,8}$	$-a_{4,9}$	$-a_{5,10}$	$-a_{6,11}$
				$-a_{1,5}$	$-a_{2,6}$	$-a_{3,7}$	$-a_{4,8}$	$-a_{5,9}$	$-a_{6,10}$	$-a_{7,11}$
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
S_{11}	S_{10}	S_9	S_8	S_7	S_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
						$\frac{\Sigma_1}{T_7}$	$\frac{\Sigma_2}{T_8}$	$\frac{\Sigma_3}{T_9}$	$\frac{\Sigma_4}{T_{10}}$	$\frac{\Sigma_5}{T_{11}}$

Comme précédemment, nous substituons aux x les nouvelles inconnues P et Q, et nous conservons les symboles

$$S_{11} = t_{11} + t_1, \qquad D_{11} = t_{11} - t_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En introduisant les nouveaux symboles

$$T_{11} = D_{11} + \frac{2}{7} s_7 + \frac{2}{6} s_6 + \frac{2}{5} s_5,$$

$$T_{10} = D_{10} + \frac{2}{7} s_7 + \frac{2}{6} s_6 + \frac{2}{5} s_5,$$

$$T_9 = D_9 + \frac{2}{7} s_7 + \frac{2}{6} s_6 + \frac{2}{5} s_5,$$

$$T_8 = D_8 + \frac{2}{7} s_7 + \frac{2}{6} s_6 + \frac{2}{5} s_5,$$

$$T_7 = D_7 \qquad + \frac{2}{6} s_6 + \frac{2}{5} s_5,$$

le système des quatorze équations normales déduites des deux

Tableaux se résume dans les trois groupes suivants :

$$(1)\quad \begin{cases} 7\lambda_7 = s_7 + Q_{11} + Q_{10} + Q_9 + Q_8, \\ 6\lambda_6 = s_6 + Q_{11} + Q_{10} + Q_9 + Q_8 + Q_7, \\ 5\lambda_5 = s_5 + Q_{11} + Q_{10} + Q_9 + Q_8 + Q_7; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} S_{11} = +3P_{11} \qquad\qquad\qquad\qquad -2P_7 - P_6, \\ S_{10} = \qquad +3P_{10} \qquad - P_8 - P_7 - P_6, \\ S_9 = \qquad\qquad +2P_9 - P_8 - P_7, \\ S_8 = \qquad - P_{10} - P_9 + 2P_8, \\ S_7 = -2P_{11} - P_{10} - P_9 \qquad + 4P_7 \\ S_6 = -2P_{11} - 2P_{10} \qquad\qquad\qquad + 4P_6; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} 105T_{11} = +208Q_{11} - 107Q_{10} - 107Q_9 - 107Q_8 - 77Q_7, \\ 105T_{10} = -107Q_{11} + 208Q_{10} - 107Q_9 - 2Q_8 + 28Q_7, \\ 105T_9 = -107Q_{11} - 107Q_{10} + 313Q_9 - 2Q_8 + 28Q_7, \\ 105T_8 = -107Q_{11} - 2Q_{10} - 2Q_9 + 313Q_8 - 77Q_7. \\ 105T_7 = -77Q_{11} + 28Q_{10} + 28Q_9 - 77Q_8 + 343Q_7. \end{cases}$$

Ces quatorze équations sont reliées par les deux identités suivantes, qui servent de contrôle pour le calcul des S et des T :

$$(4)\quad \begin{cases} S_{11} + S_{10} + S_9 + S_8 + S_7 + \frac{1}{2}S_6 = 0, \\ 5T_{11} + 4T_{10} + 3T_9 + 2T_8 + T_7 \qquad = 0. \end{cases}$$

Il reste douze équations indépendantes, qui contiennent les douze inconnues du problème.

En résolvant les systèmes (2) et (3), on obtient les groupes récurrents (5) et (6), ou les groupes (5′) et (6′) dans lesquels les inconnues sont exprimées seulement en fonction des quantités S et T :

$$(5)\quad \begin{cases} 26P_{10} = 26P_{11} + 20S_{10} + 12S_9 + 16S_8 + 8S_7 + 5S_6, \\ 5P_9 = 2P_{11} + 3P_{10} + 4S_9 + 2S_8 + S_7, \\ 2P_8 = \qquad + P_{10} + P_9 + S_8, \\ P_7 = \qquad\qquad + 2P_9 - P_8 - S_9, \\ P_6 = 3P_{11} - S_{11} \qquad\qquad - 2P_7, \end{cases}$$

ou

$$(5')\quad \begin{cases} 26(P_{10}-P_{11}) = 20S_{10}+12S_9+16S_8+8S_7+5S_6, \\ 26(P_9-P_{11}) = 12S_{10}+28S_9+20S_8+10S_7+3S_6, \\ 26(P_8-P_{11}) = 16S_{10}+20S_9+31S_8+9S_7+4S_6, \\ 26(P_7-P_{11}) = 8S_{10}+10S_9+9S_8+11S_7+2S_6, \\ 26(P_6-P_{11}) = 10S_{10}+6S_9+8S_8+4S_7+9S_6, \end{cases}$$

et

$$(6)\quad \begin{cases} 52325Q_{10} = 41860Q_{11}+32867T_{10}+11569T_9-644T_8-3772T_7, \\ 1429Q_9 = 455Q_{11}+503Q_{10}+483T_9-7T_8-41T_7, \\ 138Q_8 = 58Q_{11}-2Q_{10}-2Q_9+49T_8+11T_7, \\ 49Q_7 = 11Q_{11}-4Q_{10}-4Q_9+11Q_8+15T_7, \end{cases}$$

ou

$$(6')\quad \begin{cases} 52325(Q_{10}-0{,}8Q_{11}) = +32867T_{10}+11569T_9-644T_8-3772T_7, \\ 52325(Q_9-0{,}6Q_{11}) = +11569T_{10}+21758T_9-483T_8-2829T_7, \\ 104650(Q_8-0{,}4Q_{11}) = -1288T_{10}-966T_9+37191T_8+8533T_7, \\ 104650(Q_7-0{,}2Q_{11}) = -7544T_{10}-5658T_9+8533T_8+35029T_7. \end{cases}$$

Ces diverses équations peuvent être transformées au moyen des relations (4).

On calculera successivement les P et les Q au moyen des équations (5) et (6); puis on vérifiera le dernier par la dernière des équations (5′) et (6′).

Le calcul se trouve ainsi vérifié en entier.

Les équations (1) fournissent les valeurs des λ, que l'on calcule pour la substitution.

Erreurs probables. — L'erreur probable d'une observation est

$$r = 0{,}6745\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{18-12}}.$$

Les valeurs des F et G ressortent immédiatement des équations (5′) et (6′); on a

$$F_{10} = \frac{10}{13}, \qquad G_{10} = \frac{32867}{52325}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned} r(x_{10}) &= r(x_2) = 0{,}836r, \\ r(x_9) &= r(x_3) = 0{,}864r, \\ r(x_8) &= r(x_4) = 0{,}880r, \\ r(x_7) &= r(x_5) = 0{,}616r, \\ r(x_6) &= \qquad\quad = 0{,}416r. \end{aligned}$$

35. Division en huit parties. — En suivant la marche du calcul précédent, on détermine les quantités S et T, que l'on vérifie par les équations

$$S_9 + S_8 + S_7 + S_6 + \frac{1}{2} S_5 = 0,$$
$$4T_9 + 3T_8 + 2T_7 + T_6 = 0.$$

Après avoir résolu les équations normales, on arrive aux formules suivantes, qui servent à calculer les quantités P,

$$19P_8 = 19P_9 - 7S_9 + 7S_8 + 3S_7 - S_6,$$
$$7P_7 = 2P_9 + 5P_8 + 4S_7 + S_6,$$
$$P_6 = - P_8 + 2P_7 - S_7,$$
$$P_5 = 3P_9 - S_9 - 2P_6,$$

équations qu'on peut mettre sous la forme

$$38(P_8 - P_9) = 28S_8 + 20S_7 + 12S_6 + 7S_5,$$
$$38(P_7 - P_9) = 20S_8 + 36S_7 + 14S_6 + 5S_5,$$
$$38(P_6 - P_9) = 12S_8 + 14S_7 + 16S_6 + 3S_5,$$
$$38(P_5 - P_9) = 14S_8 + 10S_7 + 6S_6 + 13S_5.$$

Les quantités Q sont données par

$$112Q_8 = 84Q_9 + 9T_9 + 71T_8 + 10T_7,$$
$$3Q_7 = 2Q_8 - T_8 + T_7,$$
$$3Q_6 = 37Q_9 + 7Q_8 - 83Q_7 + 30T_7,$$

ou aussi

$$448(Q_6 - 0{,}75Q_9) = + 257T_8 + 22T_7 - 9T_6,$$
$$224(Q_7 - 0{,}50Q_9) = + 11T_8 + 82T_7 - 3T_6,$$
$$448(Q_8 - 0{,}25Q_9) = - 9T_8 - 6T_7 + 145T_6.$$

On trouve les λ au moyen des formules

$$\lambda_6 = \frac{1}{6}(s_6 + Q_9 + Q_8 + Q_7),$$
$$\lambda_5 = \frac{1}{5}(s_5 + Q_9 + Q_8 + Q_7 + Q_6),$$
$$\lambda_4 = \frac{1}{4}(s_4 + Q_9 + Q_8 + Q_7 + Q_6).$$

Pour le calcul des erreurs probables, nous avons

$$r = 0,6745\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{15-10}},$$

$$r(x_8) = r(x_2) = 0,809\,r,$$
$$r(x_7) = r(x_3) = 0,801\,r,$$
$$r(x_6) = r(x_4) = 0,627\,r,$$
$$r(x_5) \qquad = 0,577\,r.$$

36. Calibrage supplémentaire. — Reprenons l'équation fondamentale du calibrage

$$x_i - x_k + \lambda = a_{ik}.$$

Nous avons considéré jusqu'ici x_i, x_k et λ comme trois inconnues, déterminées en établissant un nombre suffisant d'équations de cette forme. Mais il se présente des cas où la position des points à déterminer est telle qu'on ne peut pas les faire rentrer dans un calibrage ordinaire, complet ou abrégé; on détermine alors leurs corrections à l'aide d'un calibrage *supplémentaire*, en utilisant les corrections connues de divers points d'un calibrage ordinaire.

Dans chacune des équations obtenues par l'observation, l'un des x sera connu; on déterminera l'autre, soit en employant une colonne dont la longueur a été déterminée par des observations rentrant dans un calibrage ordinaire, soit en observant la colonne dans une position telle que les deux x de l'équation ainsi trouvée soient connus.

Par exemple, dans les thermomètres à deux ampoules du premier modèle, on détermine les corrections des points voisins de 100° au moyen de la colonne de 68 degrés employée dans le calibrage en trois parties; on établit ainsi des équations telles que [1]

$$x_{31} - x_{99} + \lambda_{68} = a_{31,99}, \qquad \ldots;$$

[1] Les indices des x et des λ correspondent respectivement aux points auxquels les corrections se rapportent et aux longueurs des colonnes en degrés; ce sont les indices *naturels*, au lieu des indices *conventionnels* adoptés pour les calculs précédents. Nous les emploierons fréquemment.

x_{31} et λ_{68} sont deux quantités connues, $a_{31,99}$ la quantité observée.

On peut aussi employer une colonne d'une longueur quelconque, que l'on observe, l'extrémité supérieure étant au point 100; l'équation ainsi obtenue sert à éliminer la quantité λ de toutes les équations.

Dans l'un ou l'autre procédé, il faut répartir les observations servant à déterminer le λ, symétriquement parmi les autres, afin d'éliminer les variations produites par la marche de la température. Dans la première méthode, on a l'avantage d'employer des colonnes que l'on possède déjà, et des observations déjà faites; dans la seconde, on élimine mieux les erreurs dans les corrections des points sur lesquels on s'appuie, en employant plusieurs colonnes partant des différents points principaux du calibrage ordinaire.

37. **Exemple.** — Les corrections du thermomètre n° **4340** ayant été déterminées de 2 en 2 degrés entre $-2°$ et $+50°$, les corrections des points 96°, 98° et 102° ont été trouvées par des colonnes de 52, 54, 56 et 58 degrés, observées respectivement dans les positions : [44·96], [46·98], [48·100], [50·102]; [42·96], [44·98], [46·100], [48·102], ... Les observations dans les positions [48·100], [46·100], ... servaient à établir l'équation d'où λ était tiré.

En posant $x_{100} = 0$, on a, par exemple, les équations

$$x_{46} - x_{98} + \lambda_{52} = a_{46,98}$$
$$x_{48} - 0 + \lambda_{52} = a_{48,100}$$
$$x_{48} - x_{46} + x_{98} = a_{48,100} - a_{46,98}$$

d'où

$$x_{98} = a_{48,100} - a_{46,98} - (x_{48} - x_{46}).$$

On reconnaîtra, dans le Tableau suivant, la marche du calcul :

THERMOMÈTRE N° 4340.

Colonne de 52 degrés.

POINTS AUXILIAIRES.			OBSERVATIONS.			RÉSULTATS.	
Divis. i.	Corrections x_i.	Différences.	Positions	Résultats a_{ik}.	Différences.	Divis. k.	Corrections x_k.
	°	°		°	°		°
44	+ 0,0236	— 0,0227	44.96	— 0,0522	+ 0,0804	96	+ 0,1031
46	+ 0,0115	— 0,0106	46.98	— 0,0155	+ 0,0437	98	+ 0,0543
48	+ 0,0009		48.100	+ 0,0282		100	0,0000
50	— 0,0172	+ 0,0181	50.102	+ 0,0595	— 0,0313	102	— 0,0494

On voit que, sous les titres *Points auxiliaires* et *Observations*, les nombres de la colonne x_i et a_{ik} ont été soustraits chaque fois des nombres de la ligne qui contient le point 100; puis les nombres de la première colonne *Différences* ont été soustraits des nombres correspondants de la deuxième colonne portant le même titre; les résultats ont été placés sous le titre *Corrections* (x_k).

38. Seconde approximation. — Dans le calcul d'une première approximation, nous avons supposé les excès de volume des diverses colonnes du calibrage sur la capacité des intervalles compris entre les points principaux, proportionnels aux excès de longueur de ces colonnes sur la distance de ces points. Comme nous l'avons vu (**24**), cette supposition n'est pas rigoureuse, et les quantités observées doivent subir une petite correction, pour être exprimées dans la même unité. Cette correction est obtenue en multipliant l'excès observé par la dérivée de la correction de calibre au point considéré (**23**).

Pour calculer une seconde approximation, on porte sur du papier quadrillé, à une échelle convenable, les corrections trouvées par une première approximation, et on les réunit par un trait continu; on évalue alors l'inclinaison de la tangente à la courbe dans le voisinage de tous les points principaux. Les corrections à apporter aux observations étant toujours très petites, ce procédé est suffisamment précis. On multiplie chaque observation

ou chaque moyenne d'observations en un même point par la tangente trigonométrique de l'angle d'inclinaison en chaque point, et l'on ajoute le nombre trouvé, avec son signe, à l'observation. Tout le calcul des corrections de calibre est ensuite répété avec les nouvelles valeurs des termes connus des équations de condition.

L'équation obtenue par l'observation directe, quoique n'étant pas rigoureuse, est souvent assez approchée pour qu'il ne soit pas nécessaire de la corriger; une longue expérience a montré que, en effet, les améliorations apportées par le calcul de seconde approximation sont presque toujours illusoires, les deux résultats ne différant que dans les limites des erreurs probables. Ces différences dépendent de la qualité des tubes calibrés et du soin apporté par l'observateur à isoler et à placer aussi exactement que possible, dans la position qu'elles doivent occuper, les colonnes de mercure.

On ne peut pas donner de règles fixes sur l'opportunité de calculer une seconde approximation; mais, dans chaque cas particulier, on peut se faire d'avance une idée des modifications qu'elle apporte, en calculant les corrections qu'ont à subir les observations les plus défavorables et en les comparant avec leur incertitude.

Les corrections de calibre et les excès des colonnes augmentent en moyenne beaucoup avec la longueur des tubes; on devra donc, avant tout, appliquer les corrections de seconde approximation à une première subdivision des longs tubes. Pour des tubes de même longueur, dont les corrections de calibre ont une allure semblable, les modifications apportées par une seconde approximation varient à peu près comme le carré des corrections, les observations étant supposées faites avec le même soin.

Il est désirable que chaque observateur fasse, une fois au moins, un calcul de seconde approximation pour se rendre compte des modifications introduites; avec une certaine expérience du calibrage, on juge ensuite, à première vue, de l'utilité qu'il peut y avoir à faire ce calcul.

39. Synthèse du calibrage. Thermomètres étalons. — Il reste à montrer comment les diverses parties d'un calibrage peu-

vent être combinées pour que les corrections de tous les points de l'échelle soient déterminées et finalement exprimées dans le système [0·100]. Nous n'insisterons pas sur la nécessité de multiplier les observations, notamment dans les premières subdivisions d'un calibrage, afin d'obtenir, avec la plus grande précision possible, les corrections des points sur lesquels le calibrage entier s'appuie.

Nous passerons maintenant en revue les diverses formes de thermomètres décrites précédemment (4).

1° *Thermomètres à échelle entière de* 0° *à* 100°. — Deux schémas peuvent être employés avec avantage.

a. Division en cinq parties par un calibrage complet; les corrections des points 20, 40, 60, 80 sont exprimées dans le système [0·100]. Calibrage complet ou abrégé, de 2 en 2 degrés, de chaque section de 20 degrés; dans le calibrage complet, on peut prolonger chaque section de 2 degrés de part et d'autre, de manière que les extrémités se recouvrent; la première et la dernière section peuvent aussi être seules prolongées respectivement jusqu'à — 2° et 102°; dans un calibrage abrégé, ces points seront considérés comme supplémentaires (36), et leurs corrections seront calculées par des formules telles que

$$x_{-2} - x_6 + \lambda_8 = a_{-2,6},$$
$$x_{-2} - x_8 + \lambda_{10} = a_{-2,8},$$

dans lesquelles x_{-2} est la seule inconnue. Les x auxiliaires et les λ étant donnés ici dans le système [0·20], x_{-2} sera exprimé dans le même système.

Les corrections de tous les points sont rapportées au système [0·100] par une seule transformation, pour laquelle les points 0, 20, 40, ... servent de pivots.

b. Division en dix parties par un calibrage complet ou abrégé; division de chaque section en dix parties par un calibrage abrégé. Les corrections des points extérieurs à [0·100] sont déterminées par des observations supplémentaires.

2° *Thermomètres à une ampoule*. — A. *Échelle de* 0° *à* 50°.

— Division en deux parties [0·50], [50·100]; la correction du point 50 est exprimée dans le système [0·100]. Pour le reste du calibrage, on adoptera l'un des procédés suivants :

a. Calibrage complet, de 2,5 en 2,5 degrés, de la section [— 2,5·50]. Les corrections sont ensuite transformées dans le système [0·100], en partant des points 0 et 50, communs aux deux systèmes.

b. Division en cinq parties, calibrage complet; division en cinq parties de chaque section de 10 degrés, par un calibrage complet, ou en dix parties par un calibrage abrégé. Les sections peuvent, dans le premier cas, être prolongées à l'extérieur.

Dans les cas *a* et *b*, les corrections des points voisins de 100 sont déterminées par plusieurs colonnes supplémentaires. L'exemple numérique donné précédemment est emprunté au cas *b*.

B. *Échelle complète de* 50° *à* 100°. — Calibrage analogue au précédent; les corrections des points voisins de zéro sont déterminées par un calibrage supplémentaire.

C. *Thermomètres pour basses températures*. — Division en deux parties [— 28·36], [36·100]; la correction du point 36 est exprimée dans le système [— 28·100]. Division de la partie inférieure en quatre sections [— 28·— 12], [— 12·4], [4·20], [20·36]. Calibrage complet ou abrégé de chaque section par une division en huit parties. La première et la dernière section peuvent être prolongées, ou les corrections des points — 30 et + 38 seront, le cas échéant, déterminées par des observations supplémentaires. Les corrections des points voisins de 100 sont déterminées par les colonnes de 64 degrés de la division en deux parties.

Les transformations sont les suivantes : transformation des points — 28, — 12, + 4, + 20, + 36 du système [— 28·36] dans le système [— 28·100]; transformation du point zéro du système [— 12·4] dans le système [— 28·100], à l'aide des nouvelles corrections des points — 12 et + 4; transformation des points — 28, — 12, + 4, 20 et 36 dans le système [0·100]; enfin transformation des points de chaque section dans le système [0·100]. Les corrections des points voisins de 100 sont obtenues à l'aide des corrections des points auxiliaires exprimées dans le

système [0·100] et du λ_{64}, transformé du système [— 28·100] au système [0·100] [formule (15), n° 23].

D. *Échelle de* 100° *à* 200°. — Comparaison de l'intervalle [100·200] à l'intervalle [0·100]. Division en cinq sections de l'intervalle [100·200], calibrage complet. Division de chaque section en cinq parties par un calibrage complet, ou en dix parties par un calibrage abrégé. Les points inférieurs à 100° et voisins de zéro sont obtenus par un calibrage supplémentaire, les derniers au moyen des colonnes de 100 degrés du premier calibrage ou de colonnes plus longues.

La correction du point 200 est obtenue en partant des relations

$$x_0 - x_{100} + \lambda_{100} = a_{0,100},$$
$$x_{100} - x_{200} + \lambda_{100} = a_{100,200}.$$

Retranchant membre à membre, et posant $x_0 = 0$, $x_{100} = 0$, on aura la valeur de x_{200}.

Les corrections des points 120, 140, 160, 180 sont transformées dans le système [0·100], et, à l'aide des nouvelles corrections de ces points, celles de tous les points du calibrage serré sont transformées de même.

La précision des observations aux températures supérieures à 100° étant nécessairement médiocre, il n'y a pas lieu de chercher dans ce calibrage une très grande exactitude.

3° *Thermomètres à deux ampoules.* — A. *Échelle de* — 2° *à* 38°. — Division en trois sections [— 2·32], [32·66], [66·100]; les corrections des points 32 et 66 sont exprimées dans le système [—2·100]. Calibrage complet, de 2 en 2 degrés, de la section [—2·38]; ou division en deux parties de cette section, et calibrage complet ou réduit des subdivisions [— 2·18], [18·38]. Les corrections des points voisins de 100 sont déterminées par les colonnes de 68 degrés de la division en trois parties ou par des colonnes spéciales. Le point 18 et les points du calibrage serré ayant été transformés, le cas échéant, dans le système [— 2·38], toutes les corrections sont transformées successivement, dans le système [— 2·100], par les points — 2 et 32, et dans le système [0·100], à l'aide des points 0 et 100.

B. *Échelle de* 100° *à* 150°. — Comparaison des trois sections [0·50], [50·100], [100·150] par des colonnes de 50 et de 100 degrés. Calibrage de la section [100·150] comme les sections de 50 degrés dans les thermomètres à une ampoule. (*Voir* le cas 2A.)

Pour les thermomètres possédant un plus grand nombre d'ampoules, ou pour les modèles qui n'ont pas été prévus dans l'énumération qui précède, on combinera les observations en tenant compte des principes établis ici.

Remarque générale. — Il arrive que, dans les thermomètres munis d'ampoules, on éprouve de grandes difficultés à déplacer une colonne ayant la longueur prescrite par le diagramme du calibrage et qui ne dépasse l'ampoule que de quelques millimètres de part et d'autre; on parvient, dans ce cas, au but proposé en opérant avec une colonne plus longue, choisie de telle sorte que les observations puissent toujours être faites entre deux points principaux du calibrage. On applique ensuite aux deux observations de la colonne une correction pour tenir compte de la différence des intervalles auxiliaires.

Par exemple, dans les thermomètres à une ampoule du premier modèle, on peut faire la division en deux parties au moyen d'une colonne de 52 degrés, que l'on place à [— 2·50] et [48·100]. Le calibrage serré donnera la valeur des intervalles [— 2·0] et [48·50] par rapport au degré moyen [0·50] [*voir* (**23**)]; on calculera, d'après cela, la différence entre ces deux intervalles.

Soient x_{-2}, x_0, x_{48}, x_{50} les corrections des points auxiliaires dans le système [0·50]; $a_{-2,50}$, $a_{48,100}$ les quantités observées; on obtiendra les quantités $a_{0,50}$ et $a_{50,100}$, que l'on aurait trouvées par une colonne de 50 degrés, à l'aide des relations

$$a_{0,50} = a_{-2,50} + x_0 - x_{-2},$$
$$a_{50,100} = a_{48,100} + x_{50} - x_{48}.$$

Ce calcul est en tous points analogue au calcul de seconde approximation.

40. Exemple de transformations. — Nous calculerons maintenant la série des transformations pour le thermomètre Tonnelot n° **4340**.

La division en deux parties a donné $x_{50} = -0^{\circ},01720$.

On a trouvé, par la division en cinq parties de l'intervalle [0·50], les corrections suivantes :

Divisions.		Corrections.
0.....	$x_0 =$	0°,00000
10.....	$x_{10} =$	— 0,00116
20.....	$x_{20} =$	— 0,00992
30.....	$x_{30} =$	— 0,10275
40.....	$x_{40} =$	— 0,08058
50.....	$x_{50} =$	0,00000

En désignant par a et b les abscisses des points 0 et 50, par x_a et x_b, y_a et y_b leurs anciennes et leurs nouvelles corrections, les nouvelles corrections y_m sont données par la formule (23)

$$y_m = y_a + \frac{x_m - x_a + D(m-a)}{C},$$

dans laquelle

$$C = \frac{(b + x_b) - (a + x_a)}{(b + y_b) - (a + y_a)},$$

$$D = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a)}{(b + y_b) - (a + y_a)}.$$

Les quantités C et D sont calculées ci-après :

$$\begin{array}{lrr}
a = 0 & x_a = 0,00000 & y_a = 0,00000 \\
b = 50 & x_b = 0,00000 & y_b = -0,01720 \\
 & \overline{0,00000} & \overline{-0,01720} \\
 & a + x_a = 0,00000 & a + y_a = 0,00000 \\
 & b + x_b = 50,00000 & b + y_b = 49,98280 \\
 & \overline{50,00000} & \overline{49,98280}
\end{array}$$

$$(y_b - y_a) - (x_b - x_a) = -0,01720,$$

$$D = -0,000344, \qquad C = +1,000344.$$

Nous inscrivons ensuite, dans la première colonne, les divisions du thermomètre; dans la deuxième, les corrections dans le système [0·50]; dans la troisième, les quantités $-x_a + D(m-a)$; dans la quatrième, les sommes des nombres en regard des deux co-

lonnes précédentes; enfin, dans la cinquième, ces derniers nombres divisés par C; y_a étant nul, ces nombres sont les y_m :

m.	x_m.	$-x_a+D(m-a)$.	Σ.	$\frac{\Sigma}{C}=y_m$.
0.....	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10.....	— 0,00116	— 0,00344	— 0,00460	— 0,00460
20.....	— 0,00992	— 0,00688	— 0,01680	— 0,01680
30.....	— 0,10275	— 0,01032	— 0,09243	— 0,09240
40.....	— 0,08058	— 0,01376	+ 0,06682	+ 0,06680
50.....	0,00000	— 0,01720	— 0,01720	— 0,01720

Nous transformerons encore la section [28·42], dont les corrections ont été données précédemment (29).

$$a=30 \qquad x_a=+0,0221 \qquad y_a=+0,0924$$
$$b=40 \qquad x_b=+0,0207 \qquad y_b=+0,0668$$
$$-0,0014 \qquad -0,0256$$

$$a+x_a=30,0221 \qquad a+y_a=30,0924$$
$$b+x_b=40,0207 \qquad b+y_b=40,0668$$
$$+9,9986 \qquad +9,9744$$

$$(y_b-y_a)-(x_b-x_a)=-0,0242,$$

$$D=-0,002426, \qquad C=+1,002426.$$

m.	x_m.	$-x_a+D(m-a)$.	Σ.	$\frac{\Sigma}{C}$.	y_m.
28....	0,0000	—0,0172	—0,0172	—0,0172	+0,0752
30....	+0,0221	—0,0221	0,0000	0,0000	+0,0924
32....	+0,0365	—0,0270	+0,0095	+0,0095	+0,1019
34....	+0,0427	—0,0318	+0,0109	+0,0109	+0,1033
36....	+0,0402	—0,0367	+0,0035	+0,0035	+0,0959
38....	+0,0366	—0,0415	—0,0049	—0,0049	+0,0875
40....	+0,0207	—0,0464	—0,0257	—0,0256	+0,0668
42....	0,0000	—0,0512	—0,0512	—0,0511	+0,0413

Les nombres de la dernière colonne sont les corrections dans le système [0·100].

On vérifie les transformations en comparant entre elles les premières différences des colonnes x_m et y_m. Les différences entre les

nombres correspondants ne doivent différer que par suite des décimales négligées et de la division par C.

On a ainsi :

$\Delta_1(x_m)$.	$\Delta_1(y_m)$.	$\Delta_1(x_m) - \Delta_1(y_m)$.
— 0,0221	— 0,0172	— 0,0049
— 0,0144	— 0,0095	— 0,0049
— 0,0062	— 0,0014	— 0,0048
+ 0,0025	+ 0,0074	— 0,0049
+ 0,0036	+ 0,0084	— 0,0048
— 0,0159	— 0,0207	— 0,0048
+ 0,0207	+ 0,0255	— 0,0048

41. Thermomètres auxiliaires. — Ces thermomètres sont, en général, destinés à servir dans une partie restreinte de l'échelle, et ne portent pas les éléments nécessaires à la détermination individuelle de la valeur moyenne du degré; il faut, pour cette détermination, avoir recours à des comparaisons avec un étalon. Nous nous occuperons des thermomètres dits *calorimétriques* et *hypsométriques;* les thermomètres que nous avons nommés *météorologiques* seront considérés comme un cas particulier des premiers.

Thermomètres calorimétriques. — Ces thermomètres ne portent d'ordinaire que dix degrés environ, cette fraction d'échelle étant généralement séparée du zéro par une ampoule. Pour fixer la valeur du degré, il suffit, rigoureusement, de comparer ce thermomètre à un étalon, à deux températures suffisamment éloignées; les corrections des autres points sont obtenues par un calibrage; des observations supplémentaires donnent les corrections des points voisins de zéro.

Si la portion continue de l'échelle comprend le zéro, il suffit de déterminer la position d'un second point.

Cependant, il est bon, dans le cas des comparaisons, de chercher, comme toujours, à obtenir un contrôle des observations; on y arrive en multipliant les comparaisons à diverses températures.

Soient O et N les points de l'échelle dans le système desquels les corrections de calibre ont été exprimées; soient A, B, C, ... des points intermédiaires, de préférence équidistants, a, b, c, ... leurs abscisses, x_a, x_b, x_c, ... leurs corrections de calibre; nous

supposerons ces corrections déterminées sans erreur appréciable. Les comparaisons ayant été faites dans le voisinage des points A, B, C, ... et dûment corrigées, les différences entre le thermomètre auxiliaire et l'étalon seront z_a, z_b, z_c, ...

On posera

$$z_a = u + av,$$
$$z_b = u + bv,$$
$$z_c = u + cv,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

u est l'erreur du point O, v l'erreur du degré du thermomètre auxiliaire. Ce système, résolu par la méthode des moindres carrés, donne les valeurs les plus probables de u et v.

Si l'échelle à déterminer contient le zéro, on a, par définition, $u = 0$ (¹).

Thermomètres hypsométriques. — Les thermomètres hypsométriques sont destinés, comme il a été dit, à déterminer la pression barométrique, au moyen de la température de la vapeur d'eau bouillante. La partie utile de leur échelle est située dans le voisinage de 100°; mais, comme les comparaisons aux températures élevées sont difficiles et peu précises, il est nécessaire, si l'on veut atteindre une exactitude suffisante, de munir le thermomètre d'une fraction d'échelle voisine de zéro, de même étendue que l'échelle supérieure; les deux sont séparées par une ampoule.

La valeur du degré ayant été déterminée sur l'échelle inférieure, comme dans le cas précédent, on la reporte sur l'échelle supérieure par un calibrage auxiliaire. Ce calibrage peut être fait par divers procédés incomplets; le calibrage complet que nous allons exposer a l'avantage de conduire à un calcul symétrique extrêmement simple.

Pour opérer sur un cas déterminé, supposons que le thermomètre porte les points — 2 à 8, et 92 à 102. Si nous voulons déterminer les corrections de 2 en 2 degrés, nous isolerons une colonne de 102 degrés, que nous observerons dans les positions [— 2·100], [0·102]; une colonne de 100 degrés sera observée en [— 2·98], [0·100], [2·102]; ...; enfin, une colonne de 86 de-

(¹) Cette équation n'existe pas sans restrictions (*voir* n° 80).

grés sera placée en [6·92], [8·94]. Nous obtiendrons ainsi les équations suivantes :

Colonne de 102 degrés.

$$x_{-2} - x_{100} + \lambda_{102} = a_{-2,100},$$
$$x_0 - x_{102} + \lambda_{102} = a_{0,102}.$$

Colonne de 100 degrés.

$$x_{-2} - x_{98} + \lambda_{100} = a_{-2,98},$$
$$x_0 - x_{100} + \lambda_{100} = a_{0,100},$$
$$x_{+2} - x_{102} + \lambda_{100} = a_{2,102}.$$

Colonne de 98 degrés.

$$x_{-2} - x_{96} + \lambda_{98} = a_{-2,96},$$
$$x_0 - x_{98} + \lambda_{98} = a_{0,98},$$
$$x_{+2} - x_{100} + \lambda_{98} = a_{2,100},$$
$$x_4 - x_{102} + \lambda_{98} = a_{4,102}.$$

Colonne de 96 degrés.

$$x_{-2} - x_{94} + \lambda_{96} = a_{-2,94},$$
$$x_0 - x_{96} + \lambda_{96} = a_{0,96},$$
$$x_{+2} - x_{98} + \lambda_{96} = a_{2,98},$$
$$x_4 - x_{100} + \lambda_{96} = a_{4,100},$$
$$x_6 - x_{102} + \lambda_{96} = a_{6,102}.$$

Colonne de 94 degrés.

$$x_{-2} - x_{92} + \lambda_{94} = a_{-2,92},$$
$$x_0 - x_{94} + \lambda_{94} = a_{0,94},$$
$$x_{+2} - x_{96} + \lambda_{94} = a_{2,96},$$
$$x_4 - x_{98} + \lambda_{94} = a_{4,98},$$
$$x_6 - x_{100} + \lambda_{94} = a_{6,100},$$
$$x_8 - x_{102} + \lambda_{94} = a_{8,102}.$$

Colonne de 92 degrés.

$$x_0 - x_{92} + \lambda_{92} = a_{0,92},$$
$$x_2 - x_{94} + \lambda_{92} = a_{2,94},$$
$$x_4 - x_{96} + \lambda_{92} = a_{4,96},$$
$$x_6 - x_{98} + \lambda_{92} = a_{6,98},$$
$$x_8 - x_{100} + \lambda_{92} = a_{8,100}.$$

Colonne de 90 degrés.

$$x_2 - x_{92} + \lambda_{90} = a_{2,92},$$
$$x_4 - x_{94} + \lambda_{90} = a_{4,94},$$
$$x_6 - x_{96} + \lambda_{90} = a_{6,96},$$
$$x_8 - x_{98} + \lambda_{90} = a_{8,98}.$$

Colonne de 88 degrés.

$$x_4 - x_{92} + \lambda_{88} = a_{4,92},$$
$$x_6 - x_{94} + \lambda_{88} = a_{6,94},$$
$$x_8 - x_{96} + \lambda_{88} = a_{8,96}.$$

Colonne de 86 degrés.

$$x_6 - x_{92} + \lambda_{86} = a_{6,92},$$
$$x_8 - x_{94} + \lambda_{86} = a_{8,94}.$$

Supposons d'abord que les corrections de la partie inférieure soient connues; nous considérerons comme inconnues les corrections de la partie supérieure.

Soustrayons, dans chaque colonne, chaque équation de la précédente; les λ seront ainsi éliminés.

Les nouvelles équations peuvent être disposées dans un Tableau; la première occupera l'angle supérieur à gauche, les suivantes seront écrites en diagonales ascendantes, si l'on commence par les dernières équations de chaque colonne.

Les deux premières colonnes sont

$$\left\{\begin{array}{l} x_{-2} - x_0 - x_{100} + x_{102} = a_{-2,100} - a_{0,102}, \\ x_0 - x_2 - x_{100} + x_{102} = a_{0,100} - a_{2,102}, \\ x_2 - x_4 - x_{100} + x_{102} = a_{2,100} - a_{4,102}, \\ x_4 - x_6 - x_{100} + x_{102} = a_{4,100} - a_{6,102}, \\ x_6 - x_8 - x_{100} + x_{102} = a_{6,100} - a_{8,102}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{-2} - x_0 - x_{98} + x_{100} = a_{-2,98} - a_{0,100}, \\ x_0 - x_2 - x_{98} + x_{100} = a_{0,98} - a_{2,100}, \\ x_2 - x_4 - x_{98} + x_{100} = a_{2,98} - a_{4,100}. \\ x_4 - x_6 - x_{98} + x_{100} = a_{4,98} - a_{6,100}, \\ x_6 - x_8 - x_{98} + x_{100} = a_{6,98} - a_{8,100}. \end{array}\right.$$

Nous voyons que toutes les équations d'une même verticale ou

horizontale contiennent la même différence de deux corrections de la partie supérieure ou inférieure. En plaçant ces différences en tête des colonnes ou des lignes, comme dans les précédents calibrages, nous formerons le Tableau suivant :

	$x_{102} - x_{100}$.	$x_{100} - x_{98}$.	$x_{98} - x_{96}$.	$x_{96} - x_{94}$.	$x_{94} - x_{92}$.	$\Sigma \frac{\Sigma}{5}$.
$x_{-2} - x_0$	$a_{-2,100} - a_{0,102}$	$a_{-2,98} - a_{0,100}$	$a_{-2,96} - a_{0,98}$	$a_{-2,94} - a_{0,96}$	$a_{-2,92} - a_{0,94}$	B_1 N_1
$x_0 - x_2$	$a_{0,100} - a_{2,102}$	$a_{0,98} - a_{2,100}$	$a_{0,96} - a_{2,98}$	$a_{0,94} - a_{2,96}$	$a_{0,92} - a_{2,94}$	B_2 N_2
$x_2 - x_4$	$a_{2,100} - a_{4,102}$	$a_{2,98} - a_{4,100}$	$a_{2,96} - a_{4,98}$	$a_{2,94} - a_{4,96}$	$a_{2,92} - a_{4,94}$	B_3 N_3
$x_4 - x_6$	$a_{4,100} - a_{6,102}$	$a_{4,98} - a_{6,100}$	$a_{4,96} - a_{6,98}$	$a_{4,94} - a_{6,96}$	$a_{4,92} - a_{6,94}$	B_4 N_4
$x_6 - x_8$	$a_{6,100} - a_{8,102}$	$a_{6,98} - a_{8,100}$	$a_{6,96} - a_{8,98}$	$a_{6,94} - a_{8,96}$	$a_{6,92} - a_{8,94}$	B_5 N_5
$\Sigma =$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
$\frac{\Sigma}{5} =$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	

Faisons les sommes des colonnes, et divisons par 5; nous obtiendrons les cinq équations normales du nouveau système, relatives aux x de la partie supérieure :

$$x_{102} - x_{100} + \frac{1}{5}(x_{-2} - x_8) = M_1,$$

$$x_{100} - x_{98} + \frac{1}{5}(x_{-2} - x_8) = M_2,$$

$$x_{98} - x_{96} + \frac{1}{5}(x_{-2} - x_8) = M_3,$$

$$x_{96} - x_{94} + \frac{1}{5}(x_{-2} - x_8) = M_4,$$

$$x_{94} - x_{92} + \frac{1}{5}(x_{-2} - x_8) = M_5,$$

d'où

$$x_{102} = x_{100} + \frac{1}{5}(x_8 - x_{-2}) + M_1,$$

$$x_{98} = x_{100} - \frac{1}{5}(x_8 - x_{-2}) - M_2,$$

$$x_{96} = x_{100} - \frac{2}{5}(x_8 - x_{-2}) - M_2 - M_3,$$

$$x_{94} = x_{100} - \frac{3}{5}(x_8 - x_{-2}) - M_2 - M_3 - M_4,$$

$$x_{92} = x_{100} - \frac{4}{5}(x_8 - x_{-2}) - M_2 - M_3 - M_4 - M_5.$$

Il suffit donc de connaître la valeur moyenne du degré entre -2 et $+8$, pour pouvoir calculer toutes les corrections de la partie supérieure.

Les corrections de la partie inférieure peuvent aussi être tirées de ce Tableau ; en additionnant les lignes horizontales, on forme les équations normales relatives aux x inférieurs :

$$x_{-2} - x_0 + \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) = N_1,$$

$$x_0 - x_2 + \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) = N_2,$$

$$x_2 - x_4 + \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) = N_3,$$

$$x_4 - x_6 + \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) = N_4,$$

$$x_6 - x_8 + \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) = N_5,$$

d'où

$$x_{-2} = x_0 - \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) + N_1,$$

$$x_2 = x_0 + \frac{1}{5}(x_{102} - x_{92}) - N_2,$$

$$x_4 = x_0 + \frac{2}{5}(x_{102} - x_{92}) - N_2 - N_3,$$

$$x_6 = x_0 + \frac{3}{5}(x_{102} - x_{92}) - N_2 - N_3 - N_4,$$

$$x_8 = x_0 + \frac{4}{5}(x_{102} - x_{92}) - N_2 - N_3 - N_4 - N_5.$$

Nous supposerons d'abord $x_{-2} = 0$, $x_8 = 0$, et nous calculerons les valeurs de x_{102} et x_{92}, que nous introduirons dans les dernières formules. Comme vérification, la dernière devra être satisfaite identiquement.

Les corrections de calibre de la partie inférieure seront appliquées aux résultats des comparaisons, ce qui nous donnera la valeur du degré ; enfin, la valeur de $x_8 - x_{-2}$ sera introduite dans le premier groupe de formules. Les corrections des points 92 à 102 ne contiendront plus qu'une seule inconnue, x_{100}, que l'on déterminera par un autre genre d'expériences.

Il existe une vérification très simple de tout le calcul. D'après la formation du Tableau, on voit que la somme des quantités A

ou B est égale à la somme des différences entre la première et la dernière des observations faites avec chaque colonne.

Un calibrage de la nature de ceux que nous avons nommés *calibrages supplémentaires* nous a ainsi donné les corrections de la partie supérieure et de la partie inférieure. Cette méthode est susceptible d'autres applications.

42. Tables des corrections de calibre. — Les corrections de calibre ayant été déterminées pour un certain nombre de points équidistants, on obtient les corrections des points intermédiaires par une interpolation graphique ou analytique, faite en supposant la continuité des corrections. Pour la première, il convient d'employer l'échelle de 1^{cm} ou 2^{cm} par degré pour les abscisses, et de 2^{cm} par centième de degré pour les ordonnées.

L'interpolation par le calcul est fondée sur des principes mieux définis, mais exige un travail beaucoup plus considérable.

Dans le Mémoire plusieurs fois cité, M. Broch a donné une formule très pratique pour exécuter ce calcul. Considérant quatre points successifs du calibrage, on les réunit par une courbe du troisième degré, dont on n'utilise que la section moyenne.

Soient x_0, x_1, x_2, x_3 les corrections de quatre points équidistants. On forme les trois différences :

Corrections.	Premières différences.	Secondes différences.	Troisième différence.
x_0			
	$\Delta_1 = x_1 - x_0$		
x_1		$\Delta_2 = \Delta'_1 - \Delta_1$	
	$\Delta'_1 = x_2 - x_1$		$\Delta_3 = \Delta'_2 - \Delta_2$
x_2		$\Delta'_2 = \Delta''_1 - \Delta'_1$	
	$\Delta''_1 = x_3 - x_2$		
x_3			

On a, pour l'interpolation, la formule connue

$$x_y = f(y) = x_0 + y\Delta_1 + \frac{y(y-1)}{1.2}\Delta_2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta_3.$$

En posant successivement

$$y = 1, \quad y = 1 + \frac{1}{n}, \quad y = 1 + \frac{2}{n}, \quad \ldots,$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
x_1 = f(1) &= x_0 + \Delta_1, \\
f\left(1+\frac{1}{n}\right) &= x_0 + \frac{n+1}{n}\Delta_1 + \frac{n+1}{2n^2}\Delta_2 - \frac{n^2-1}{6n^3}\Delta_3, \\
f\left(1+\frac{2}{n}\right) &= x_0 + \frac{n+2}{n}\Delta_1 + \frac{2n+4}{2n^2}\Delta_2 - \frac{2n^2-8}{6n^3}\Delta_3, \\
f\left(1+\frac{3}{n}\right) &= x_0 + \frac{n+3}{n}\Delta_1 + \frac{3n+9}{2n^2}\Delta_2 - \frac{3n^2-27}{6n^3}\Delta_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Les premières différences de cette série sont

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{1}{n}\Delta_1 + \frac{n+1}{2n^2}\Delta_2 - \frac{n^2-1}{6n^3}\Delta_3, \\
\delta'_1 &= \frac{1}{n}\Delta_1 + \frac{n+3}{2n^2}\Delta_2 - \frac{n^2-7}{6n^3}\Delta_3, \\
\delta''_1 &= \frac{1}{n}\Delta_1 + \frac{n+5}{2n^2}\Delta_2 - \frac{n^2-19}{6n^3}\Delta_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Les secondes différences sont

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \frac{1}{n^2}\Delta_2 + \frac{1}{n^3}\Delta_3, \\
\delta'_2 &= \frac{1}{n^2}\Delta_2 + \frac{2}{n^3}\Delta_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Enfin les troisièmes différences sont constantes :

$$\delta_3 = \frac{1}{n^3}\Delta_3.$$

On a donc, entre x_1 et x_2, une série dont les différences sont

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{1}{n}\Delta_1 + \frac{n+1}{2n^2}\Delta_2 - \frac{n^2-1}{6n^3}\Delta_3, \\
\delta_2 &= \frac{1}{n^2}\Delta_2 + \frac{1}{n^3}\Delta_3, \\
\delta_3 &= \frac{1}{n^3}\Delta_3.
\end{aligned}
$$

C'est à l'aide de ces différences qu'on calcule, à partir de x_1, les corrections des points intermédiaires. La première et la dernière

série d'interpolation doivent être prolongées respectivement jusqu'au premier et jusqu'au dernier des points principaux.

43. **Exemple d'interpolation.** — Proposons-nous de faire une interpolation en dix parties entre les points 30 et 32 du thermomètre n° **4340**, dans le système [28 · 42] (p. 66). Nous avons

$$\delta_1 = +0,1\,\Delta_1 + 0,055\,\Delta_2 - 0,0165\,\Delta_3,$$
$$\delta_2 = +0,01\,\Delta_2 + 0,001\,\Delta_3,$$
$$\delta_3 = +0,001\,\Delta_3.$$

Div.	Corr.	Premières différences.	Secondes différences.	Troisième différence.
28°	0,0000			
		+ 0,0221		
30	+ 0,0221		— 0,0077	
		+ 0,0144		— 0,0005
32	+ 0,0365		— 0,0082	
		+ 0,0062		
34	+ 0,0427			

$\Delta_1 = +0,0221,$ $\Delta_2 = -0,0077,$ $\Delta_3 = -0,0005;$

d'où

$\delta_1 = +0,00179475,$ $\delta_2 = -0,0000775,$ $\delta_3 = -0,0000005.$

Troisième différence.	Secondes différences.	Premières différences.	Corrections.	Divisions.
			+ 0,0221	30°
		+ 0,00179475		
	— 0,0000775		+ 0,02389475	30,2
— 0,0000005		+ 171725		
	— 780		+ 0,02561200	30,4
		+ 163925		
	— 785		+ 0,02725125	30,6
		+ 156075		
	— 790		+ 0,02881200	30,8
		+ 148175		
	— 795		+ 0,03029375	31
		+ 140225		
	— 800		+ 0,03169600	31,2
		+ 132225		
	— 805		+ 0,03301825	31,4
		+ 124175		
	— 810		+ 0,03426000	31,6
		+ 116075		
	— 0,0000815		+ 0,03542075	31,8
		+ 0,00107925		
			+ 0,0365	32

On peut se contenter d'une interpolation linéaire pour les dixièmes de degré.

Les corrections, déterminées comme on vient de le voir, sont portées dans une Table à double entrée, analogue aux Tables de logarithmes; les degrés sont inscrits en titres dans la première colonne, et les dixièmes dans la première ligne horizontale.

Les Tables des corrections de calibre des bons thermomètres sont généralement établies en millièmes de degré.

COEFFICIENTS DE PRESSION.

44. Théorie. — Le réservoir d'un thermomètre éprouve des déformations par suite des pressions extérieures ou intérieures qu'il subit. Pour éliminer cette cause d'erreurs, il est nécessaire de calculer l'effet produit par ces pressions, et d'en tenir compte en appliquant aux lectures des corrections appropriées (1).

En général, on nomme *coefficient de pression extérieure* ou *intérieure* d'un réservoir la quantité α_e ou α_i qui, multipliée par une pression extérieure ou intérieure, exprime la variation de l'unité de volume du vase.

Dans le cas particulier d'un thermomètre, et pour faciliter les calculs, on prend comme unité de pression le millimètre de mercure et comme unité de variation le degré; de plus, on désigne par *coefficient de pression intérieure* la variation totale produite sur le réservoir et le mercure qu'il contient.

Soient β_e et β_i ces coefficients dans le cas d'un thermomètre; il est aisé d'en exprimer la valeur en fonction des constantes de l'élasticité.

Désignons, d'après Lamé, par λ et μ les deux constantes de constitution en fonction desquelles les coefficients de l'élasticité peuvent être exprimés (2); par P_i et P_e les pressions agissant à

---

(1) Les premières recherches relatives aux déformations produites par la pression sur le réservoir d'un thermomètre paraissent avoir été faites par Egen [*Untersuchungen über das Thermometer* (*Pogg. Ann.*, t. XI, p. 276; 1827)].

Voir aussi A. von Œttingen (*Thèse;* Dorpat, 1865) et de nombreux travaux postérieurs.

(2) Dans cette notation, le coefficient d'élasticité a pour valeur

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Le coefficient de Poisson (rapport de la contraction transversale à l'allongement) est donné par

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

(*voir* VIOLLE, *Cours de Physique*). Quelques auteurs écrivent μ au lieu de σ et introduisent $\alpha = \frac{1}{E}$ dans les formules, de préférence à E.

l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère de rayons R_i et R_e. Le déplacement d'une molécule située à la distance r du centre est exprimé par

$$(1)\qquad \Delta r = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{P_i R_i^3 - P_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}\,r + \frac{1}{4\mu}\,\frac{(P_i - P_e) R_e^3 R_i^3}{R_e^3 - R_i^3}\,\frac{1}{r^2}.$$

Pour $r = R_i$,

$$(2)\qquad \Delta R_i = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{P_i R_i^3 - P_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}\,R_i + \frac{1}{4\mu}\,\frac{(P_i - P_e) R_e^3 R_i}{R_e^3 - R_i^3}.$$

Pour une augmentation du rayon intérieur égale à ΔR_i, le volume intérieur augmente de

$$(3)\qquad \Delta V_i = 4\pi R_i^2 \Delta R_i.$$

Pour $P_e = 0$, l'augmentation de l'unité de volume est

$$(4)\qquad \frac{\Delta V_i}{V_i} = \frac{3\Delta R_i}{R_i} = 3P_i\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{R_i^3}{R_e^3 - R_i^3} + \frac{1}{4\mu}\,\frac{R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}\right).$$

Le coefficient de pression intérieure d'un vase sphérique est donc

$$(5)\qquad \alpha_i = \frac{3}{R_e^3 - R_i^3}\left(\frac{R_i^3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{R_e^3}{4\mu}\right).$$

On trouve de même, pour le coefficient de pression extérieure,

$$(6)\qquad \alpha_e = \frac{3R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{4\mu}\right),$$

d'où

$$(7)\qquad \alpha_e - \alpha_i = \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}.$$

C'est l'expression de la *compressibilité cubique* de la matière dont est formée la sphère.

En posant $\frac{R_i + R_e}{2} = R$, $R_e - R_i = e$, on a approximativement, lorsque e est très petit par rapport à R,

$$(8)\qquad \alpha_e = \alpha_i = \frac{R}{e}\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{4\mu}\right).$$

Remplaçons, dans la formule (1), r par R_e, et calculons ΔV_e pour $P_e = 0$; nous trouvons

$$\Delta V_e - \Delta V_i = \frac{V_i P_i}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}; \tag{9}$$

d'où résulte le théorème suivant :

L'augmentation du volume des parois d'une sphère creuse, soumise à une pression intérieure, est proportionnelle à la pression et au volume intérieur de la sphère, et indépendante de l'épaisseur des parois.

Dans le cas d'une portion de cylindre circulaire creux, suffisamment éloignée des bases pour être soustraite à leur influence, le déplacement horizontal d'un point situé à l'intérieur des parois est donné par

$$\Delta r = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{P_i R_i^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{(P_i - P_e) R_i^2 R_e^2}{2\mu(R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r}. \tag{10}$$

Le déplacement qu'éprouve, dans la direction de l'axe, une section normale, située originairement à la distance z d'une section supposée fixe, est

$$\Delta z = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{P_i R_i^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} z. \tag{11}$$

En introduisant les valeurs de ΔR_i et ΔZ (Z étant la hauteur du cylindre) dans l'équation

$$\frac{\Delta V_i}{V_i} = \frac{1}{R_i^2 Z}(R_i^2 \Delta Z + 2 Z R_i \Delta R_i), \tag{12}$$

on trouve la valeur du coefficient de pression intérieure

$$\alpha_i = \frac{3}{R_e^2 - R_i^2}\left(\frac{R_i^2}{3\lambda + 2\mu} + \frac{R_e^2}{3\mu}\right) \tag{13}$$

ou approximativement

$$\frac{3R}{2e}\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{3\mu}\right)$$

Le coefficient de pression extérieure est

$$(14) \qquad \alpha_e = \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(\frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Les relations (7) et (9) subsistent.

En supposant, ce qui n'est sans doute qu'approximativement vrai, que, dans un réservoir composé d'un cylindre terminé par des hémisphères, la partie cylindrique et les calottes se déforment d'une manière indépendante, on pourra combiner les formules précédentes de façon à obtenir les valeurs qui conviennent sensiblement au cas d'un réservoir thermométrique. La relation (7), commune aux deux cas, doit encore subsister. Or la compression du mercure vient s'ajouter à l'effet produit par une pression intérieure sur le réservoir seul; si donc on désigne par $\varkappa_m$ le coefficient de compressibilité du mercure, par $\varkappa_v$ celui du verre et par k un facteur numérique servant à ramener les quantités β et $\varkappa$ aux mêmes unités, on trouve

$$(15) \qquad \beta_l = \beta_e + k(\varkappa_m - \varkappa_v).$$

Les $\varkappa$ sont rapportés, généralement, à la pression d'une atmosphère ou d'une mégadyne par centimètre carré (*voir* note p. 15); les paramètres λ et μ sont exprimés en kilogrammes de poids ou mégadynes par millimètre carré; les coefficients β sont donnés, comme il a été dit, en degrés par millimètre de pression mercurielle.

Supposons $\varkappa_m - \varkappa_v$ rapporté à la pression d'une atmosphère; pour réduire ce nombre aux unités des β, il faut diviser par 760 et multiplier par le nombre de degrés que contient le réservoir; en d'autres termes, multiplier par la réciproque de la dilatation apparente du mercure dans le verre. En introduisant dans les formules les coefficients qui conviennent aux températures peu élevées, on trouve que le réservoir d'un thermomètre en verre dur contient environ 6250 degrés; donc $k = 8,22$.

Les coefficients $\varkappa_m$ et $\varkappa_v$ ont été déterminés par divers observateurs. La valeur du premier paraît assez bien connue, le second est plus incertain; mais la différence de ces deux coefficients a été déterminée avec une grande exactitude par MM. Amaury et Des-

camps [1]. D'après ces observateurs,

$$\varkappa_m - \varkappa_v = 1,87.10^{-6} \quad \text{pour} \quad 1^{\text{atm}} \text{ [2]};$$

donc

$$\beta_i = \beta_e + 0,000015\,4 \frac{\text{degrés}}{\text{mm. de mercure}}. \tag{15'}$$

Le coefficient de pression extérieure des thermomètres peut être déterminé commodément avec une grande précision; la détermination de β_i est plus difficile, et l'on préfère calculer ce dernier coefficient au moyen de la relation (15').

45. Détermination de β_e. — On détermine le coefficient β_e en observant les déplacements de l'extrémité de la colonne mercurielle, le thermomètre étant soumis alternativement à des pressions extérieures très différentes : l'une est la pression atmosphérique, l'autre est voisine de zéro.

On emploie avec avantage, pour ces déterminations, l'appareil suivant [3] :

Un tube T en verre (*fig.* 18), de 75^{cm} de longueur et de $1^{\text{cm}},5$ de diamètre environ, est destiné à recevoir le thermomètre; il est fermé par un bouchon de caoutchouc traversé par une tige de métal terminée par un crochet; à sa partie supérieure se trouvent deux tubulures latérales A et B, munies de robinets. Ce tube contient un peu de mercure au fond, et le reste est rempli jusqu'à la naissance des tubulures par de la glycérine, qui facilite

---

(1) C. Descamps, *Étude sur la compressibilité des liquides* (Thèse; Paris, 1872).

(2) C'est en effet $\varkappa_m - \varkappa_v$ et non pas $\varkappa_m$ que MM. Amaury et Descamps ont déterminé par la méthode de Jamin. Il a été fait jusqu'ici trois déterminations de la compressibilité du mercure :

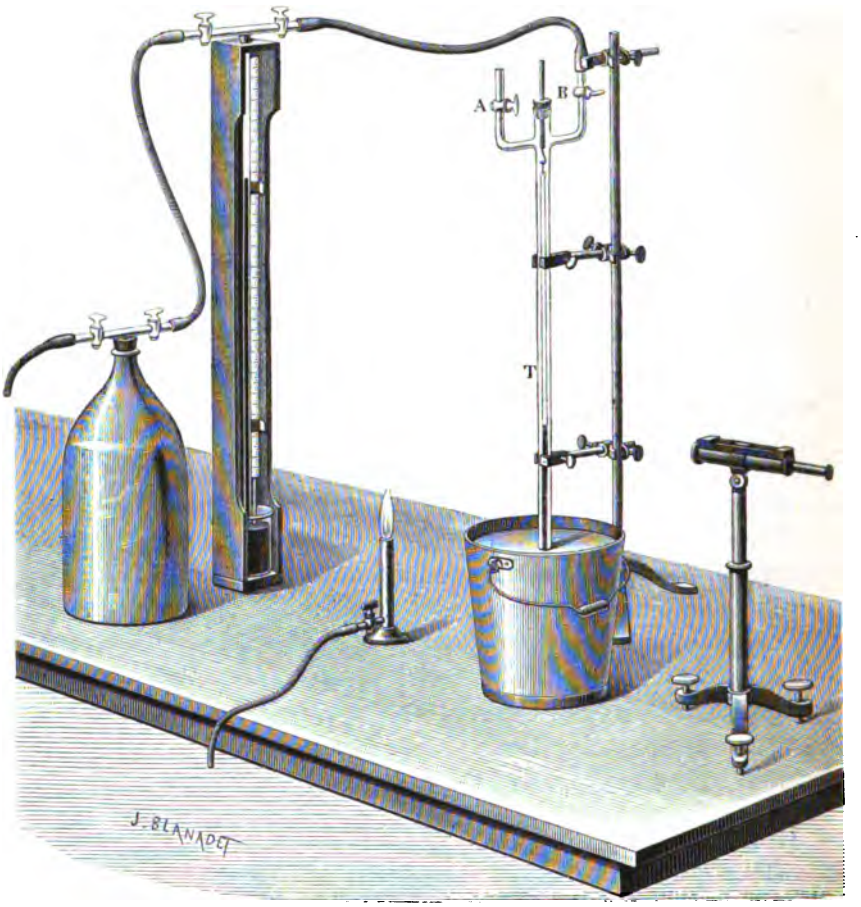
D'après Regnault		$\varkappa_m = 3,5.10^{-6}$ par atm.
» Grassi		2,9
» Amaury et Descamps	Brut	1,87
	Corrigé	3,9 à 4,1

Nous avons adopté précédemment (p. 33) le nombre de Regnault. [*Voir*, à ce sujet, Guillaume, *Sur la déformation des réservoirs élastiques et la compressibilité des liquides* (*Archives de Genève*, 3e série, t. XVII, p. 154; 1887.)]

(3) Un appareil de ce genre a été employé pour la première fois par M. Marek; il a été ensuite perfectionné et complété par MM. Benoît et Pernet.

les lectures au travers des parois du tube et diminue l'espace nuisible; il plonge par le bas dans un seau plein d'eau qui régularise

Fig. 18.



la marche de la température. L'une des tubulures s'ouvre dans l'atmosphère, l'autre est en commmunication avec un manomètre à une branche, relié à un grand récipient hermétiquement fermé, communiquant avec une trompe à eau, qui sert à faire le vide. Les lectures sont faites au moyen d'une lunette à niveau.

Les observations se font de la manière suivante : on suspend le thermomètre au crochet qui traverse le bouchon, à une hauteur

telle que son réservoir plonge en entier dans le mercure; puis, lorsque le vide est suffisant, on interrompt la communication entre le récipient et la trompe; au moyen des robinets A et B, on met alors le tube T en communication alternativement avec l'atmosphère et avec le récipient, en observant le thermomètre à chaque fois; le manomètre indique, pour chaque observation, la différence entre la pression atmosphérique et celle qui existe dans l'appareil.

46. Calcul. — Soient

a_1, a_3 deux observations successives sous la pression atmosphérique;

a_2 la lecture intermédiaire dans le vide;

P_1 la pression correspondante.

Si les lectures sont régulièrement espacées, on élimine sensiblement la marche de la température, en posant

$$P_1 \beta_e = \left(\frac{a_1 + a_3}{2} - a_2\right).$$

Deux nouvelles lectures a_4 et a_5, avec une différence de pression P_2, donnent

$$P_2 \beta_e = \left(\frac{a_3 + a_5}{2} - a_4\right),$$

et ainsi de suite; on termine par une lecture sous la pression atmosphérique.

Si l'espace nuisible est considérable, et si par conséquent P diminue fortement dans le cours d'une série par suite de la rentrée de l'air à chaque interversion des robinets, il est nécessaire de calculer une équation normale rigoureuse

$$\beta[P_i P_i] = \left[P_i\left(\frac{a_{2i-1} + a_{2i+1}}{2} - a_{2i}\right)\right].$$

Dans le cas contraire, on obtient un résultat identique au nombre trouvé à l'aide de la méthode des moindres carrés, par la formule plus simple

$$\beta \sum_1^n P_i = \sum_1^n \left(\frac{a_{2i-1} + a_{2i+1}}{2} - a_{2i}\right).$$

Nous verrons plus loin quelles sont les petites corrections que β doit subir.

Après avoir établi toutes les équations de condition et avoir calculé le second membre de la dernière équation, on aura une vérification de tout le calcul, en cherchant directement la valeur de cette expression mise sous la forme

$$\sum_1^n a_{2i+1} + \frac{a_1 + a_{2n+1}}{2} - \sum_1^n a_{2i};$$

on additionnera donc toutes les observations sous la pression atmosphérique, à l'exception de la première et de la dernière, que l'on divisera par 2; puis on soustraira la somme des observations dans le vide partiel.

Erreur probable. — En substituant dans les équations de condition, on trouve les erreurs résiduelles Δ, d'où l'on tire l'erreur probable par la formule

$$r(\beta) = 0,6745 \sqrt{\left[\frac{\Delta}{P}\frac{\Delta}{P}\right] \frac{1}{n(n-1)}}$$

ou, approximativement,

$$r(\beta) = \frac{0,6745}{\text{Pr. moy.}} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n(n-1)}}.$$

On trouve

$$\text{Pour } n = 40 \ldots\ldots\ldots \quad r(\beta) = \frac{0,6828}{\Sigma P} \sqrt{[\Delta\Delta]},$$

$$\text{» } n = 20 \ldots\ldots\ldots \quad r(\beta) = \frac{0,6918}{\Sigma P} \sqrt{[\Delta\Delta]},$$

$$\text{» } n = 10 \ldots\ldots\ldots \quad r(\beta) = \frac{0,7108}{\Sigma P} \sqrt{[\Delta\Delta]}.$$

47. Développements. — Dans ces expériences, il est bon d'établir une marche de température [1], afin de rendre les observations suffisamment indépendantes les unes des autres. On y arrive en refroidissant le bain avant l'expérience, ou en plaçant dans son voisinage un brûleur dont on règle la flamme à volonté.

---

[1] C.-E. GUILLAUME, *Études thermométriques* (*T. et M.*, t. V, p. 32 et suiv.; 1886).

Cette marche de la température a aussi un autre but. Dans les expériences à température constante, le ménisque est toujours ascendant dans les observations de rang impair, descendant dans les autres; il en résulte une erreur constante dans le résultat, provenant en partie de ce que la pression capillaire sur le réservoir est différente dans les deux cas, en partie aussi de ce que les lectures du ménisque sont influencées par la forme de celui-ci. L'ascension de la température doit donc être suffisante pour ramener, après chaque diminution de la pression, le ménisque à sa forme ascendante. Une différence de 0,01 degré entre deux lectures homologues paraît suffire, pour des thermomètres de dimensions ordinaires (longueur du degré 5^{mm} à 8^{mm}).

Il résulte de nombreuses expériences directes ou indirectes que les résidus d'élasticité sont négligeables pour un verre de bonne qualité, dans le cas des coefficients de pression; le réservoir soumis à des déformations arrive, après un temps très court, à un état définitif d'équilibre (1).

L'influence de la température se manifeste par une légère augmentation du coefficient avec la température, correspondant à une diminution dans le coefficient d'élasticité. Pour le verre dur, M. Guillaume a trouvé une variation de 0,00016 par degré. Ce coefficient est presque identique à la différence entre la dilatation cubique du mercure et la dilatation linéaire du verre. Si l'on néglige, d'une part, la correction à faire subir à la pression intérieure du mercure sur le réservoir, d'autre part la variation du coefficient de pression, on commet une erreur insignifiante; on pourra donc, dans la construction des Tables de correction pour la pression intérieure, employer un argument constant.

M. Mills a vérifié la constance du coefficient de pression jusqu'à 140^{atm} (2).

---

(1) *Voir* F. Kohlrausch, *Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion.* Göttingen, 1863; — J. Hopkinson, *On a torsional strain which remains in a glass fibre after release from twisting stress* (*Proceedings*, t. XVIII, p. 148; 1878); — Weidmann, *Ueber den Zusammenhang zwischen elastischer und thermischer Nachwirkung des Glases* (*Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 214; 1886).

(2) E.-J. Mills, *Notice of Researches in Thermometry* (*Phil. Mag.*, 5e série, t. VI, p. 62; 1878). L'auteur n'indique pas la nature du verre de ses thermomètres, ni l'épaisseur du réservoir.

Corrections. — Les corrections que doit subir le coefficient β_e proviennent en partie des erreurs dans la mesure de la pression, en partie de l'erreur constante résultant de ce que les mesures sont faites en un point déterminé du tube thermométrique, où la section diffère en général de la section moyenne. Les corrections relatives à la pression se rapportent à la température, à la capillarité dans le manomètre, et à la variation de la hauteur du mercure dans le thermomètre; leur somme algébrique est le plus souvent négligeable. Quant à la correction relative à la section du tube, qui est analogue à la correction de seconde approximation dans le calibrage, elle peut fréquemment dépasser 1 pour 100, et il convient au moins de se rendre toujours compte de sa grandeur.

48. Exemple. — Nous donnerons dans le Tableau suivant les observations relatives à la détermination du coefficient de pression du thermomètre Tonnelot n° 4340. Les colonnes 3 et 4, 7 et 8 contiennent en outre le calcul des quantités

$$\frac{a_{2i-1}+a_{2i+1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a_{2i-1}+a_{2i+1}}{2}-a_{2i}.$$

Man.	Therm.	Moy.	Diff.	Man.	Therm.	Moy.	Diff.
0	14,318			0	14,431		
731,7	237	14,3250	0,0880	726,7	346	14,4355	0,0895
0	332			0	440		
731,2	246	3365	905	726,2	355	4450	900
0	341			0	450		
730,7	255	3455	905	725,7	368	4560	880
0	350			0	462		
730,2	267	3560	890	725,2	383	4670	840
0	362			0	472		
729,7	284	3650	810	724,7	390	4800	900
0	368			0	488		
729,2	290	3760	860	724,2	405	4925	875
0	384			0	497		
728,7	304	3900	860	723,7	414	5020	880
0	396			0	507		
728,2	313	4020	890	723,2	426	5115	855
0	408			0	516		
727,7	326	4130	870	722,7	437	5230	860
0	418			0	530		
727,2	334	14,4245	0,0905	722,2	445	14,5340	0,0890
0	14,431			0	14,538		

Dans le Tableau suivant, les deux premières colonnes contiennent les deux membres des équations de condition tirées des observations ci-dessus; les trois autres donnent le calcul des erreurs résiduelles et de la quantité [ΔΔ].

Pressions.	Thermomètre observé.	Thermomètre calculé.	Obs. — Calc.	ΔΔ.
731,7 β =	0,0880	0,0883	— 0,0003	0,00000009
731,2	905	883	+ 22	484
730,7	905	882	+ 23	529
730,2	890	881	+ 9	81
729,7	810	881	— 71	5041
729,2	860	880	— 20	400
728,7	860	880	— 20	400
728,2	890	879	+ 11	121
727,7	870	878	— 8	64
727,2	905	878	+ 27	729
726,7	895	877	+ 18	324
726,2	900	877	+ 23	529
725,7	880	876	+ 4	16
725,2	840	875	— 35	1225
724,7	900	875	+ 25	625
724,2	875	874	+ 1	1
723,7	880	874	+ 6	36
723,2	855	873	— 18	324
722,7	860	872	— 12	144
722,2 β =	0,0890	0,0872	+ 0,0018	0,00000324
14539,0 β =	1,7550		+ 0,0187	0,00011406
β =	0,00012071 ± 0,00000051		— 0,0187	

49. Calcul de l'épaisseur du réservoir. — L'expression mathématique du coefficient de pression d'un vase de forme bien définie permettrait de calculer sa valeur, si l'on connaissait les dimensions du vase et les constantes élastiques du verre dont il est formé. Dans le cas particulier d'un thermomètre, ce calcul serait très peu précis, parce que la donnée la plus importante, l'épaisseur du réservoir, ne peut pas être déterminée directement avec exactitude. En revanche, on peut, connaissant le coefficient de pression, calculer cette épaisseur avec une approximation souvent suffisante.

En assimilant le réservoir du thermomètre à un cylindre (on peut faire sans difficulté une supposition plus approchée), on po-

sera [44, éq. (14)]

$$\alpha_e = \frac{\beta_e}{8,22} = \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(\frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu}\right).$$

On peut admettre, d'après les expériences de divers observateurs (1),

$$\frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu} = 63.10^{-7},$$

l'unité de pression étant l'atmosphère.

On aura donc la relation

$$5,2.10^{-5}\,\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} = \beta_e.$$

Connaissant R_e, on calculera R_i (2).

Dans l'exemple cité, on a

$$5,2.10^{-5}\,\frac{R^2}{R_e^2 - R_i^2} = 1,21.10^{-4}, \qquad R_e = 2^{mm},40;$$

d'où

$$R_i = 1^{mm},80.$$

L'épaisseur des parois est donc de $0^{mm},60$.

L'examen d'un grand nombre de thermomètres de différente construction, appartenant au Bureau international, a montré que les réservoirs soufflés présentent entre eux de très fortes divergences; les réservoirs soudés, au contraire, peuvent être rendus aussi semblables qu'on le désire, par un choix convenable des tubes qui servent à les construire. Il n'y a aucun avantage à employer des thermomètres dont le réservoir est très mince; ce que l'on pense gagner en sensibilité est rendu en grande partie illusoire par les erreurs souvent considérables produites par des déforma-

---

(1) Nous avons admis $\varkappa_v = 23.10^{-7}$ et $\lambda = \mu$.

Voir Regnault, *Relation des expériences*, t. I, p. 462; 1847. — Cornu, *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 333; 1869. — Voigt, *Wied. Ann.*, t. XV, p. 497; 1882. — Amagat, *Comptes rendus*, t. CVII, p. 618; 1888.

(2) On pourrait aussi plonger le thermomètre dans un liquide ayant le même indice de réfraction et mesurer au micromètre l'épaisseur des parois, qui apparaît alors en vraie grandeur.

tions du réservoir dues aux variations de la pression capillaire. Les réservoirs minces ont, en outre, le grand inconvénient d'être excessivement fragiles.

Les réservoirs soudés, construits par M. Tonnelot, ont une épaisseur de $0^{mm},5$ à $0^{mm},7$; leur coefficient de pression extérieure, en degrés par millimètre de mercure, est compris entre 0,00010 et 0,00013.

Nous développerons dans le troisième Chapitre plusieurs questions relatives à la capillarité dans les tubes des thermomètres, que nous n'avons pu qu'indiquer ici.

50. Tables des corrections de pression. — Pour appliquer aux lectures les corrections qu'elles doivent subir en raison des variations des pressions éprouvées par le réservoir et le mercure, on construit deux Tables différentes, l'une pour la pression extérieure, l'autre pour la pression intérieure.

La première est établie de millimètre en millimètre de pression, à partir de la pression atmosphérique normale pour laquelle la correction est supposée nulle; elle est étendue de part et d'autre, suivant les besoins; son argument est β_e.

La seconde peut être calculée pour tous les degrés, avec l'argument β_i multiplié par la longueur moyenne l du degré, en millimètres. Comme il est pratiquement impossible de connaître exactement les déformations des différentes parties du réservoir, on admet qu'il est rigoureusement symétrique, et l'on mesure la hauteur du mercure à partir de son milieu. En désignant par d la distance entre ce point et le zéro, la correction à t° est

$$\beta_i(d + lt).$$

Quoique les corrections ne soient pour ainsi dire jamais appliquées au delà du millième de degré, il convient cependant d'établir ces deux Tables en dix-millièmes, afin de faciliter l'interpolation.

INTERVALLE FONDAMENTAL.

51. Ordre des expériences. — Les corrections de calibre des thermomètres ont été calculées dans la supposition que l'intervalle [0·100] correspond exactement à 100 degrés. Il nous reste à déterminer la valeur de cet intervalle.

Le système centigrade étant défini par la différence entre la température d'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique normale et la température de fusion de la glace pure, on détermine la correction d'intervalle fondamental d'un thermomètre en observant ses indications lorsqu'il est exposé à ces deux températures.

Nous avons donné, dans le premier Chapitre, les raisons pour lesquelles le zéro d'un thermomètre doit toujours être observé *après* la température que l'on veut déterminer. Cette règle s'applique évidemment à l'intervalle fondamental : *l'observation du point* 100 *doit être faite avant l'observation du zéro.*

52. Détermination du point 100. — Divers appareils ont été construits dans le but d'exposer les thermomètres à la température d'ébullition de l'eau; ils dérivent, pour la plupart, de l'appareil classique de Regnault; celui de M. P. Chappuis nous paraît être jusqu'ici le plus pratique et le plus complet; il présente sur les anciens appareils deux avantages essentiels : 1° le thermomètre est soustrait à l'influence directe de l'eau bouillante; 2° il peut être placé en position verticale et en position horizontale, ce qui fournit un contrôle précieux pour les corrections de pression. En voici la description succincte.

Le thermomètre T est placé dans un tube à double circulation A (*fig.* 19; détail *fig.* 20) long de 75^{cm}, large de 6^{cm}; il traverse à frottement un bouchon de liège maintenu dans une douille, et qui ferme exactement l'orifice supérieur; cette douille, indépendante du couvercle, est retenue en place par une petite tige de laiton passant sous une glissière; pour plus de sûreté, le thermomètre est suspendu par un fil à une tige métallique que l'on peut fixer à une hauteur convenable; il est, en outre, guidé par deux pièces P, percées de trous et munies d'un petit entonnoir central, tenues à frottement dans l'intérieur du tube. Le tube A est supporté par un tuyau horizontal B formant axe, et qui pénètre dans les paliers M_1, M_2 (*fig.* 21); il peut être placé horizontalement ou verticalement, et sa position est déterminée par deux arrêts avec vis de réglage, dont un seul N est visible dans le dessin; une clef de sûreté F le maintient en position verticale; un manche en bois G sert à le manœuvrer. Du côté du support M_1, le tuyau B

est en communication avec le tube intérieur où est placé le thermo-

Fig. 19.

Fig. 20.

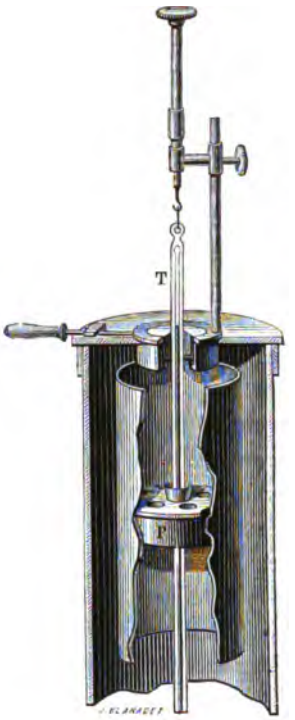
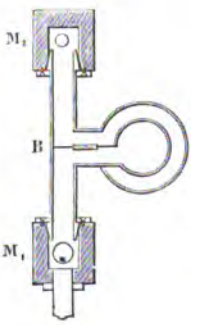


Fig. 21



mètre; du côté de M_2, il est relié seulement au manchon extérieur.

La vapeur développée dans la chaudière C en cuivre arrive, par un tube de plomb D entouré de feutre, en M_1, puis entre dans l'intérieur du tube A, qu'elle parcourt dans toute sa longueur, passe entre les parois et sort en M_2; elle se condense dans un tube vertical E, ouvert par le haut et enveloppé d'une circulation d'eau froide; l'eau condensée est ramenée au fond de la chaudière par le tube K. Un manomètre à eau H indique la différence des pressions intérieure et extérieure, autrement dit la *surpression* dans l'appareil. Les lectures se font avec une petite lunette L fixée au tube A. La colonne mercurielle ne doit dépasser le bouchon que de la quantité strictement nécessaire à l'observation.

D'après la position du manomètre, la différence de niveau dans les deux branches indique l'excès de pression de la vapeur à la sortie de la chaudière. Dans le condenseur, cet excès est nul; or, comme sur le parcours de la vapeur se trouvent deux étranglements, à l'entrée et à la sortie du tube A, on peut conclure, *a priori,* que la pression dans ce tube est la moyenne entre la pression atmosphérique et la pression à la sortie de la chaudière. Des expériences directes, consistant à observer le manomètre, tandis que le tube était alternativement ouvert et fermé dans le haut, ont confirmé cette supposition. On aura donc la pression totale dans l'appareil en ajoutant à la pression, mesurée au baromètre, la moitié de l'excès, toujours très petit, indiqué par le manomètre.

Le thermomètre doit rester exposé à la température de 100° aussi longtemps que le déplacement du zéro est encore sensible, c'est-à-dire de quelques minutes à une heure environ, suivant la nature de l'enveloppe [*voir* (69)]. Après cela, la lecture du thermomètre est faite en position horizontale et verticale; la dernière est réduite à la position horizontale.

Il arrive fréquemment que, pendant l'exposition prolongée à 100°, une petite quantité de mercure distille et se dépose en gouttelettes tout près de l'extrémité de la colonne. Tant que la quantité de mercure distillé est minime, l'erreur qui en résulte sur la valeur de l'intervalle fondamental est négligeable, les points fondamentaux étant déplacés sensiblement de la même quantité (¹).

(¹) La dilatation apparente totale du mercure dans le verre entre 0° et 100° est d'environ $\frac{1}{60}$; une perte de mercure de 0,06 degré entraîne donc une erreur de 0,001 degré.

Mais il est bon cependant de laisser pendant ce temps le thermomètre en position horizontale et de faire la lecture d'abord dans cette position; dans le cas contraire, quelques gouttelettes de mercure peuvent être reprises entre les deux lectures, de telle sorte que la détermination du point 100 en position verticale ne correspond pas à la détermination du zéro faite après.

Afin d'être assuré que, dans la lecture en position horizontale, la colonne de mercure n'est pas détachée, il est bon de relever l'appareil immédiatement avant l'observation.

Température d'ébullition de l'eau. — La température d'ébullition de l'eau varie, comme l'on sait, avec la pression. On en tient compte, dans les mesures, en déterminant, à l'aide d'un baromètre de précision, la pression au moment de l'observation, et en appliquant une correction convenable à la température d'ébullition.

Regnault (1) a déterminé la tension de la vapeur d'eau pour des pressions variant dans de très larges limites; les résultats de ses expériences, réunis d'abord par une méthode graphique, ont été soumis, par M. Broch (2), à une nouvelle discussion et à un nouveau calcul; ce dernier a donné, en particulier, une formule d'interpolation du quatrième degré pour représenter les températures d'ébullition de l'eau; cette formule, correspondant à des pressions comprises entre 680^{mm} et 800^{mm}, est la suivante :

$$T - 100 = a(H - 760) + b(H - 760)^2 + c(H - 760)^3 + d(H - 760)^4;$$

T est la température d'ébullition en degrés centigrades normaux, H la pression barométrique réduite; les constantes empiriques ont les valeurs suivantes :

$$a = +0{,}036\,696\,9,$$
$$b = -0{,}000\,020\,459,$$
$$c = +0{,}000\,000\,016\,39,$$
$$d = -0{,}000\,000\,000\,014\,3.$$

Pour les pressions voisines de 760^{mm}, on peut se servir de la

(1) REGNAULT, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, etc., t. XXI, p. 465-633; 1847.

(2) O.-J. BROCH, *Tension de la vapeur d'eau* et *Points fixes des thermomètres et températures d'ébullition de l'eau pure* (*T. et M.*, t. I; 1881).

formule approximative

$$T - 100 = \frac{H - 760}{27,25}.$$

La Table V, en partie extraite de celle de M. Broch et en partie interpolée d'après la Table des tensions de la vapeur d'eau, donne les valeurs de T pour différentes pressions.

53. **Détermination du zéro.** — On détermine le zéro d'un thermomètre en l'exposant, pendant un instant, à la température de la glace fondante. On emploie avec avantage, pour cette détermination, un appareil construit de la manière suivante : une cloche à douille A (*fig.* 22) en verre, d'une capacité de quelques litres [1], munie d'un robinet à écoulement à la partie inférieure, est maintenue verticalement par un support; celui-ci porte, en outre, deux tiges B, B, avec des entailles garnies de liège, dans lesquelles le thermomètre T est pressé doucement par un ressort C.

La glace, finement râpée, est placée dans la cloche, additionnée d'eau distillée, puis fortement tassée avec un morceau de bois; le robinet est alors ouvert pour laisser écouler l'eau en excès, qu'on a amenée à sa surface en comprimant la glace; aussitôt que la surface de la glace commence à se sécher, on referme le robinet. La masse de la glace doit rester imprégnée d'eau. Les déterminations dans la glace sèche peuvent être faussées, soit parce que le contact avec le thermomètre est imparfait, soit parce que la température de la glace est inférieure à 0°; suivant les cas, l'erreur est positive ou négative. La glace étant ainsi préparée, on y perce un trou avec une baguette de verre appuyée contre les tiges B; le trou ne doit pas être prolongé jusqu'au fond de la cloche.

La détermination du zéro doit être faite rapidement, afin de réduire à un minimum l'ascension du zéro qui commence à se produire aussitôt que la température s'abaisse. Ce précepte doit être d'autant plus rigoureusement suivi que la température à laquelle a été soumis le thermomètre est plus élevée.

---

[1] Un entonnoir de 2^{lit} de capacité suffit lorsque la température du laboratoire est peu élevée; lorsque la température atteint 12° ou 15°, il convient d'employer un entonnoir plus grand ou entouré d'un second cylindre concentrique.

La vitesse de refroidissement influe fortement sur la position du zéro; il en résulte une cause importante de divergences dans les déterminations de l'intervalle fondamental. On peut, sans danger, plonger dans la glace un thermomètre dont la température est encore de 45° à 50°.

Fig. 22.

Dans toutes les déterminations du zéro succédant à des observations précises faites à une température peu élevée, il est avantageux de se servir d'une lunette à micromètre.

Nature de la glace. — Il est important, pour déterminer le zéro des thermomètres, de se servir de glace assez pure; il n'est

cependant pas nécessaire, comme on le croit fréquemment, d'employer de la glace obtenue en faisant congeler de l'eau distillée. Les expériences faites par M. Pernet et M. Marek [1] ont montré que le mode de traitement de la glace est aussi important que sa pureté, au moins dans les limites d'impureté que peuvent atteindre la neige, la belle glace naturelle ou la glace artificielle préparée avec soin. Dans les expériences de ces deux excellents observateurs, la température de fusion de la glace d'eau distillée privée d'air a été admise comme zéro normal. Voici les résultats obtenus par M. Pernet :

Nature de la glace.	Température.
	°
Glace d'eau distillée privée d'air	0,0000
Glace d'eau distillée	—0,0014
Glace naturelle mélangée d'eau distillée	—0,0017
Glace naturelle humide	—0,0003
Glace naturelle râpée, sèche	—0,0035
Neige propre, sèche	—0,0060
Neige mélangée d'eau distillée	—0,0004
La même après écoulement de l'eau	—0,0038

On voit que, chaque fois que la glace naturelle pure ou la neige est mélangée d'eau distillée, la température de fusion est la même dans les limites des erreurs d'observation.

Les expériences comparatives de M. Marek ont été faites avec de la glace artificielle préparée avec soin; cette glace sortait des mouleaux à — 5° C. environ. Les résultats furent les suivants :

Nature de la glace.	Température.
	°
Eau distillée au point de congélation	0,0000
Neige fondante, sans écoulement	—0,0011
Glace artificielle râpée, mélangée d'eau	—0,0017
Glace artificielle lavée avec beaucoup d'eau, écoulement libre	—0,0130
Glace artificielle lavée avec peu d'eau, écoulement libre	—0,0162
Glace artificielle sèche, râpée	—0,0519
Glace artificielle sèche, concassée	—0,0919

[1] PERNET, *Sur la manière d'éliminer dans l'évaluation des temperatures l'influence de la variation des points fixes des thermomètres à mercure* (*T. et M.*, t. I, p. B.12 et 13).

On peut souvent se procurer, dans les villes, de beaux blocs de glace très pure, provenant des lacs de la Norvège ou de la Suisse; cette glace donne un zéro parfaitement constant.

Pour réduire rapidement la glace en fines parcelles, on la râpe dans une auge quadrangulaire, en bois, garnie de plaques de laiton et portant transversalement, dans le fond, un couteau d'acier encastré obliquement dans une ouverture.

54. Calcul de l'intervalle fondamental; Tables. — Soient l_t, l_0 les lectures brutes du thermomètre dans la vapeur d'eau bouillante et dans la glace fondante, t la température de la vapeur donnée par la Table. La lecture l_t devra subir une correction de calibre et de pression extérieure, enfin une correction de pression intérieure si elle est faite en position verticale. La lecture l_0 subira ces trois corrections. Soient respectivement c_t, c_0 les corrections totales. En désignant par $[\mathrm{I}\cdot f]$ l'intervalle fondamental du thermomètre, c'est-à-dire le nombre de divisions correspondant à 100 degrés, on aura évidemment

$$\frac{(l_t + c_t) - (l_0 + c_0)}{t} = \frac{[\mathrm{I}\cdot f]}{100},$$

d'où

$$[\mathrm{I}\cdot f] = 100\,\frac{(l_t + c_t) - (l_0 + c_0)}{t}.$$

Cas des thermomètres hypsométriques. — Dans les thermomètres hypsométriques, il ne peut être question, à proprement parler, d'un intervalle fondamental. La quantité que l'on détermine par les expériences ci-dessus est, dans ce cas, la correction du point 100, c'est-à-dire la quantité x_{100} que nous avons gardée comme inconnue dans les formules développées précédemment (41). On a donc

$$x_{100} = t - [(l_t + c_t) - (l_0 + c_0)].$$

Nous verrons plus tard (69) que, dans certains cas, on peut se passer de déterminer le zéro et prendre, comme point de départ, le point 100 devenu suffisamment fixe; on écrit alors simplement

$$x'_{100} = t - (l_t + c_t),$$

x_{100} ou x'_{100} ayant été déterminés par des expériences prélimi-

naires dans lesquelles t est connu ; cette dernière quantité devient plus tard l'inconnue que l'on détermine au moyen du thermomètre.

Tables. — Pour les thermomètres à division purement arbitraire, on calcule une *Table de coïncidence*, entre les divisions du thermomètre et les degrés. Pour les thermomètres à division équidistante adaptée de très près à l'intervalle fondamental, on aura une *Table de corrections*. L'indication du thermomètre étant $[I \cdot f]$ à 100°, la correction devra être, pour cette lecture, $[I \cdot f] - 100$. Comme elle est proportionnelle à la lecture, l'argument de la Table est $\frac{[I \cdot f] - 100}{[I \cdot f]}$.

55. **Exemple.** — Thermomètre Tonnelot, n° 4340; détermination faite au Pavillon de Breteuil le 11 janvier 1886. Les pressions ont été mesurées au moyen d'une échelle en laiton. Le facteur de correction pour la pesanteur est 1,000 331.

PRESSIONS.

	mm
Baromètre brut	754,82 à 4°,12
Baromètre réduit	754,56
Pression d'eau dans la glace : 64mm	4,71 mercure
Excès de pression dans la vapeur : 1mm d'eau.	0,07
Pression totale à zéro	759,27
Pression totale dans la vapeur	754,63

Température de la vapeur : 99°,802.

THERMOMÈTRE.

LECTURES BRUTES.			CORRECTIONS.			LECTURES CORRIGÉES.		
Point 100		Point zéro.	Calibre.	Pression extérieure.	Pression intérieure.	Point 100		Point zéro.
horizontal.	vertical.					horizontal.	vertical.	
99,735			+0,006	+0,001	0,000	99,742		
	99,674		+0,008	+0,001	+0,061		99,744	
		—0,150	0,000	0,000	+0,009			—0,141

$$[1 \cdot f] = 100 \frac{99,743 + 0,141}{99,802} = 100^{\text{div}},082.$$

when 100° is in question

Valeur d'une division : 0,99918 degré.

L'argument de la Table est donc, d'après cette détermination, — 0,000 82.

La moyenne de cinq déterminations faites sur ce thermomètre a donné — 0,000 814, ± 0,000 014.

56. Correction d'une mesure de température. — Il reste à montrer l'usage des Tables de corrections, dont le principe a été indiqué dans ce Chapitre. Nous corrigerons deux observations du thermomètre n° 4340, faites, l'une en position horizontale, l'autre en position verticale. Les températures seront finalement exprimées dans l'échelle propre aux thermomètres à mercure en verre dur. Les corrections à appliquer à ces températures pour les réduire à l'échelle normale seront données dans le Chapitre V.

On trouvera, dans les exemples cités plus haut, les éléments des Tables de correction employées. Nous y ajouterons :

Distance du milieu du réservoir au zéro de l'échelle...	$64^{mm},0$
Longueur du degré.....	6,523

Premier exemple. — Le thermomètre a été observé en position horizontale, dans un bain d'eau à 60^{mm} au-dessous de la surface. La lecture du thermomètre donne + 29°,848.

Immédiatement après la lecture, on détermine le point zéro, en plongeant le thermomètre en position verticale, jusqu'au voisinage du trait zéro, dans la glace trempée d'eau. La lecture donne — 0°,078.

Le baromètre est observé en même temps. La pression barométrique, réduite à zéro de température, à 45° de latitude et au niveau de la mer, est trouvée égale à $764^{mm},2$.

Calcul.

	Température à mesurer.	Zéro correspondant.
	mm	mm
Pression barométrique réduite	764,2	764,2
60mm pression d'eau = mercure	4,4	
64mm » » = »		4,7
Pressions totales	768,6	768,9
	°	°
Lectures brutes	+29,848	—0,078
Corrections — de calibre	+ 0,091	0,000
Corrections — de pression extérieure	— 0,001	—0,001
Corrections — de pression intérieure		—0,009
Corrections — de zéro	+ 0,070	—0,070
Lecture réduite	+30,008	
Correction d'intervalle fondamental	— 0,024	
Température dans l'échelle du thermomètre à mercure	+29,984	

Second exemple. — Le thermomètre a été observé en position verticale dans un bain d'eau. Le milieu du réservoir est à 400mm au-dessous de la surface. La lecture du thermomètre a donné + 35°,615.

La détermination du zéro donne — 0°,085.

La pression barométrique réduite est 754mm,8.

Calcul.

	Température à mesurer.	Zéro correspondant.
	mm	mm
Pression barométrique réduite	754,8	754,8
400mm pression d'eau = mercure	29,4	
64mm » » = »	»	4,7
Pressions totales	784,2	759,5
	°	°
Lectures brutes	+35,615	—0,085
Corrections — de calibre	+ 0,098	0,000
Corrections — de pression extérieure	— 0,003	0,000
Corrections — de pression intérieure	+ 0,040	+0,009
Corrections — de zéro	+ 0,076	—0,076
Lecture réduite	+ 35,826	
Correction d'intervalle fondamental	— 0,029	
Température dans l'échelle du thermomètre à mercure	+35,797	

COMPARAISONS.

57. But et méthode. — Nous avons vu que quelques éléments de correction des thermomètres auxiliaires doivent être déterminés par comparaison avec un étalon. Cette opération peut avoir aussi un autre but ; en comparant divers thermomètres étalons bien étudiés, on peut déterminer leurs écarts. S'ils sont de même verre, on se rend compte ainsi des divergences accidentelles provenant des erreurs de leur étude ; s'ils sont de verres différents, on détermine, par des comparaisons, les lois de leurs divergences systématiques.

Pour comparer deux thermomètres, on les place côte à côte dans un bain d'eau ou d'alcool, à une température que l'on maintient constante ou plutôt légèrement ascendante. Dans les comparaisons précises, les thermomètres doivent être immergés au moins jusqu'à l'extrémité de la colonne ; dans les expériences de moindre précision, on peut laisser émerger une partie de la colonne et appliquer aux lectures une correction appropriée (84).

Après avoir fortement agité l'eau du bain, pour établir l'uniformité de la température, on lit successivement l'indication des deux thermomètres ; cette opération est répétée un certain nombre de fois, en intervertissant chaque fois l'ordre des lectures. Lorsque la nature des thermomètres le permet, il est utile de les retourner au milieu de la série, pour éliminer les erreurs de parallaxe.

Le zéro doit être déterminé, en principe, avant et après chaque série ; la première détermination n'est faite que lorsque le thermomètre a été exposé pendant quelque temps à la température à mesurer, afin que la position du zéro devienne suffisamment stable. La moyenne des lectures de la série est réduite, dans la règle, avec la moyenne des zéros pris avant et après. Lorsqu'on veut diminuer le travail, dans des expériences de moyenne précision, on peut supprimer la détermination du zéro avant la série.

Dans les comparaisons, il est presque toujours avantageux de déterminer le zéro au micromètre.

58. Appareils. — Nous décrirons les appareils destinés à com-

parer les thermomètres en position verticale (cloches) et en position horizontale (auge).

Cloches. — On peut se servir, pour les comparaisons en position verticale, d'un appareil composé de trois cloches coaxiales en verre (*fig.* 23) de forme cylindrique, fermées en bas par des hémisphères, et distantes l'une de l'autre de 1^{cm} environ. La cloche intérieure, qui est fermée par un double couvercle en laiton, contient une certaine quantité d'eau; les intervalles annulaires sont aussi couverts. La cloche extérieure repose sur un pied circulaire placé dans un seau plein d'eau, que l'on peut amener à une température convenable. Le tout est supporté par un grand escabeau en bois. Le couvercle, maintenu en place par deux ressorts, est traversé au centre par un bouchon métallique, dans lequel glissent à frottement deux tiges de laiton terminées par des crochets; c'est à ces derniers que les thermomètres sont suspendus avec leurs réservoirs côte à côte. Quatre tiges de laiton, réunies par le haut, supportent dans l'eau une plaque annulaire de même métal, servant d'agitateur.

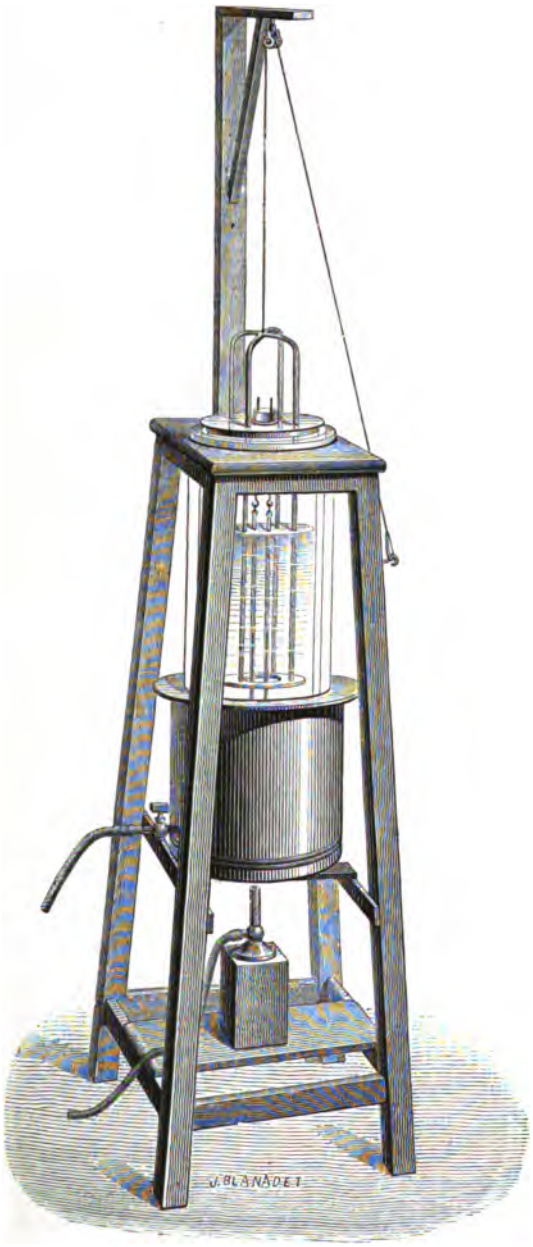
On emploie, pour les observations, deux petites lunettes, grossissant 10 à 12 fois, placées horizontalement à 40^{cm} environ des thermomètres; elles sont munies, devant l'objectif, d'un diaphragme fendu verticalement, destiné à donner une netteté suffisante aux images rendues diffuses par la courbure des cloches.

Les thermomètres sont observés par transparence, la lumière étant, au besoin, atténuée et égalisée par un écran en papier de soie suspendu derrière l'appareil.

Auge. — On arrive à de meilleurs résultats, en comparant les thermomètres, en position horizontale, dans une double auge en métal, analogue à celles du comparateur à dilatation (*Pl. II, III et IV*). L'auge intérieure, destinée à recevoir les thermomètres, peut avoir 1^{m} de longueur, $0^{m},15$ à $0^{m},20$ de hauteur et $0^{m},25$ à $0^{m},30$ de largeur; elle est à simples ou doubles parois de métal; elle est enfermée dans une auge plus grande, en métal, garnie de bois.

L'auge intérieure contient de petits supports semblables à ceux de l'appareil à calibrer; des bandes de verre blanc forment un fond éclairé. Une glace plane épaisse, débordée de toutes parts par un cadre, recouvre l'auge et empêche l'évaporation. Toutes

Fig. 23.



les parties de l'appareil dans lesquelles on n'observe pas sont couvertes par des planchettes que l'on peut déplacer à volonté.

Les agitateurs W, W′, placés dans les deux auges, sont composés essentiellement d'un large tube L′ qui règne tout le long de l'auge et se termine dans une boîte cylindrique verticale, avec ouverture latérale à la partie supérieure, contenant une hélice à laquelle on peut communiquer un mouvement de rotation rapide à l'aide d'un électromoteur, ou à la main, par les volants U et les poulies y, y'. L'eau aspirée à une extrémité de l'auge est ainsi reversée à l'autre.

La constance de la température est assurée par une circulation d'eau dans l'auge extérieure. Cette eau, chauffée ou refroidie dans une cuve séparée de l'auge, entre dans celle-ci par le bas et se déverse par des trop-pleins; elle peut aussi passer dans un serpentin placé dans l'intervalle des deux auges.

Les observations sont faites à l'aide d'une lunette verticale, portée sur une double glissière et munie à l'extérieur d'un miroir incliné à 45°, qui renvoie la lumière sur les thermomètres. La lunette peut aussi être simplement portée sur un pied avec vis de réglage posé sur la glace.

59. **Calcul des résultats.** — Jusqu'ici nous avons supposé implicitement que les comparaisons étaient faites seulement entre deux thermomètres. On peut former des groupes plus nombreux, mais la précision diminue. Les thermomètres étant plus éloignés les uns des autres, l'uniformité de température est moindre; puis la lecture correspondante de tous les thermomètres dure plus longtemps, et, quoique les observations soient faites en commençant alternativement aux deux bouts de la série, l'élimination de la marche de la température est moins bonne. Enfin, plus les thermomètres à comparer sont nombreux, plus il est probable que l'extrémité d'une colonne sera cachée derrière le trait; les lectures, dans ce cas, sont incertaines de plusieurs millièmes de degré. On ne devra donc former, pour les comparaisons, des groupes comprenant plus de deux thermomètres que lorsqu'on ne cherchera pas à atteindre une très haute précision.

Lorsqu'on veut déterminer avec une grande précision les divergences de plusieurs thermomètres, on remplace les comparaisons

en un seul groupe, par une série fermée de comparaisons deux à deux, dans toutes les combinaisons possibles. Les erreurs fortuites sont ainsi très bien éliminées. Les différences par rapport à la moyenne de tous les thermomètres ou les divergences deux à deux sont alors déduites de l'ensemble des comparaisons par un calcul que nous allons exposer.

Soient x_i et x_k les différences inconnues entre les indications des thermomètres I et K à une température déterminée, et la moyenne M des n thermomètres en expérience. Posons

$$x_i - x_k = a_{ik}.$$

La différence a_{ik} est fournie par l'observation. Les n thermomètres donnent $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons deux à deux ; on aura donc autant d'équations de cette forme.

Pour calculer, au moyen de ces équations de condition, les n inconnues x, on dispose ces équations dans un Tableau analogue à celui qu'a indiqué M. Thiesen pour le calcul d'un calibrage (30). Toutes les équations contenant x_i sont inscrites dans la $i^{\text{ième}}$ colonne et dans la $i^{\text{ième}}$ ligne, de telle sorte que x_i soit partout positif dans la colonne et négatif dans la ligne. Nous aurons ainsi :

$$\begin{array}{llll}
x_1 - x_1 = a_{1,1} = 0, & x_2 - x_1 = a_{2,1} = -a_{1,2}, & \ldots, & x_n - x_1 = a_{n,1} = -a_{1,n}, \\
x_1 - x_2 = a_{1,2}, & x_2 - x_2 = a_{2,2} = 0, & \ldots, & x_n - x_2 = a_{n,2} = -a_{2,n}, \\
x_1 - x_3 = a_{1,3}, & x_2 - x_3 = a_{2,3}, & \ldots, & x_n - x_3 = a_{n,3} = -a_{3,n}, \\
x_1 - x_4 = a_{1,4}, & x_2 - x_4 = a_{2,4}, & \ldots, & x_n - x_4 = a_{n,4} = -a_{4,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_1 - x_n = a_{1,n}, & x_2 - x_n = a_{2,n}, & \ldots, & x_n - x_n = a_{n,n} = 0, \\
\hline
n x_1 - \sum_1^n x_k = \sum_1^n a_{1,k}, & n x_2 - \sum_1^n x_k = \sum_1^n a_{2,k}, & \ldots, & n x_n - \sum_1^n x_k = \sum_1^n a_{n,k}.
\end{array}$$

En divisant chaque équation par n et en remarquant que $\sum_1^n x_k$ est nul par définition, on a

$$x_1 = \frac{1}{n}\sum_1^n a_{1,k}, \qquad x_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n a_{2,k}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{1}{n}\sum_1^n a_{n,k}.$$

Comme vérification, la somme des x doit être nulle.

Connaissant les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous pouvons rapporter les différences, non plus à la moyenne des n thermomètres, mais à une échelle quelconque par rapport à laquelle cette moyenne est déterminée, par exemple à l'échelle d'un des thermomètres du groupe, considéré comme étalon, ou à la moyenne de plusieurs de ces thermomètres, donnant la même échelle dans les limites des erreurs fortuites.

En formant, au moyen des x calculés, les différences $x_i - x_k$, et en les introduisant dans le Tableau ci-dessus, en regard des nombres observés, on calcule les erreurs résiduelles qui donnent une idée exacte de la précision des résultats, à la condition que les comparaisons deux à deux aient été complètement indépendantes. Comme vérification du calcul, la somme des erreurs résiduelles doit s'annuler, dans chaque colonne et dans chaque ligne, dans les limites des décimales conservées.

Lorsqu'on a un grand nombre de thermomètres à comparer entre eux, les comparaisons en un seul groupe deviennent souvent trop laborieuses. On peut alors diviser les thermomètres en groupes de quatre ou cinq, que l'on réunit en formant un nouveau groupe avec un thermomètre pris dans chacun des premiers.

60. Exemple. — Nous extrayons d'un dossier de comparaisons faites au Bureau international un exemple du calcul qui vient d'être exposé. Ces comparaisons ont été faites deux à deux, entre quatre thermomètres à une ampoule, dont deux en verre dur et deux en cristal dur français [1], dans le but de déterminer la loi des divergences systématiques entre ces deux espèces de thermomètres; on a d'abord calculé, dans le Tableau, les divergences entre chaque thermomètre et la moyenne des quatre; puis, à l'aide des x calculés, la divergence entre la moyenne des deux thermomètres en verre dur et la moyenne des deux en cristal. Les titres des colonnes et des lignes ont la même signification que dans le Tableau Thiesen; ainsi le nombre $+1,0$ de la première colonne signifie :

$$\text{Indication } [4327] = \text{Indication } [4330] + 0^\circ,0010.$$

---

[1] *Études thermométriques*, p. 87.

Résumé des observations et calcul des différences par rapport à la moyenne.

L'unité est le millième de degré.

NUMÉROS.	4327.			4330.			4450.			4451.			NUMÉROS.
	O.	C.	O − C	O.	C.	O − C	O.	C.	O − C.	O.	C.	O − C.	
4327	"	"	"	− 1,0	− 1,0	0,0	+ 7,5	+ 7,2	+ 0,3	+ 6,0	+ 6,2	− 0,2	4327
4330	+ 1,0	+ 1,0	0,0	"	"	"	+ 7,5	+ 8,2	− 0,7	+ 8,0	+ 7,2	+ 0,8	4330
4450	− 7,5	− 7,2	− 0,3	− 7,5	− 8,2	+ 0,7	"	"	"	+ 1,5	+ 1,0	− 0,5	4450
4451	− 6,0	− 6,2	+ 0,2	− 8,0	− 7,2	− 0,8	+ 1,5	+ 1,0	+ 0,5	"	"	"	4451
Σa =	− 12,5			− 16,5			+ 16,5			+ 12,5			
$\frac{1}{4}\Sigma a$ =	− 3,1			− 4,1			+ 4,1			+ 3,1			

Résultats.

4327 ..... $x_1 = M - 0,0031$

4330 ..... $x_2 = M - 0,0041$

4450 ..... $x_3 = M + 0,0041$

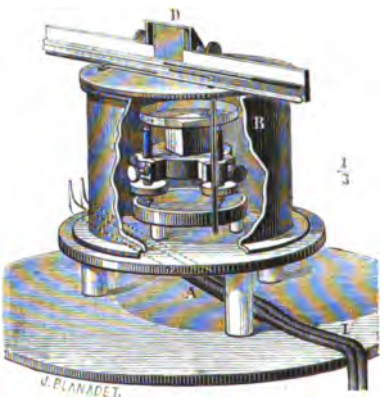
4451 ..... $x_4 = M + 0,0031$

Cristal — Verre ..... $\frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} = + 0,0072$

61. Thermorégulateur. — Dans une foule d'expériences, et particulièrement dans la comparaison des thermomètres, il est nécessaire d'obtenir un courant d'eau maintenue automatiquement à température constante. On emploie, dans ce but, un thermorégulateur. L'appareil que nous allons décrire a été construit par M. Benoît; il donne de bons résultats et a l'avantage d'être très simple (1).

La *fig.* 24 représente ce régulateur appliqué au dilatomètre

Fig. 24.



Fizeau dans sa forme primitive (2).

Le régulateur est formé d'un tube mince A, légèrement incliné, terminé en pointe pour la facilité du remplissage, dans lequel on a introduit quelques gouttes d'un liquide volatil (3). L'autre extrémité est soudée à un tube plus étroit I, recourbé verticalement vers le bas, et mis en communication, par un tuyau de caoutchouc T (*fig.* 25) à parois épaisses, avec un interrupteur de gaz.

Le gaz d'éclairage, amené par le tuyau C descend par le tube

---

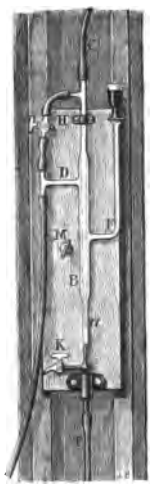
(1) Le principe de cet appareil paraît avoir été indiqué par M. Raffard; MM. Andreæ et Schlœsing ont construit des régulateurs analogues.

(2) Benoît, *Études sur l'appareil de M. Fizeau pour la mesure des dilatations* (*T. et M.*, t. I, p. C.9 et suiv.; 1881). Nous décrirons, dans le Chapitre VI, le dilatomètre perfectionné.

(3) Pour prévenir le développement subit de la vapeur, il est bon de laisser une petite bulle d'air à l'extrémité du tube.

intérieur jusqu'à l'orifice *a*, remonte ensuite dans l'espace annulaire compris entre lui et le tube B qui l'enveloppe, et s'échappe latéralement en D, d'où il est conduit au brûleur. Celui-ci est mis, en outre, en communication directe avec la prise C par un deuxième canal H, muni d'un robinet qui laisse passer constamment une petite quantité de gaz et maintient le bec en veilleuse, quand, par l'effet du jeu de l'appareil, le passage se trouve fermé en *a*. Le tube H peut aussi être séparé de D et aboutir directement à un petit orifice appliqué contre un brûleur de Bunsen, et

Fig. 25.



servant d'allumeur. Le tube T est rempli de mercure, qui presse sur le liquide volatil.

Le jeu de l'appareil se comprend aisément. L'interrupteur étant fixé à une hauteur déterminée et le niveau du mercure réglé à quelques centimètres au-dessous de l'orifice *a*, on allume un brûleur sous l'étuve ou sous la cuve à échauffer. Lorsque la température est assez élevée, il se produit, dans le liquide volatil, une bulle de vapeur dont la tension va croissant et dont le volume augmente; le mercure monte dans le tube B, et, pour une température donnée, ferme le passage en *a*; l'étuve ou la cuve se refroidit alors par le rayonnement ou l'entrée de l'eau qui maintient le niveau constant; le mercure baisse, le gaz afflue de nouveau au brû-

leur et la température remonte. Il se produit ainsi une série d'oscillations de plus en plus faibles, après lesquelles la température de l'étuve ou de l'eau dans la cuve est sensiblement constante.

Deux tubes latéraux, F et K, servent à ajouter ou à enlever du mercure suivant les besoins. L'interrupteur est fixé sur une planchette mobile le long d'une glissière sur laquelle elle peut être arrêtée à une hauteur convenable par une vis de pression M. Pour obtenir une température donnée, il faut régler l'appareil de telle manière que la distance verticale de l'orifice *a* au réservoir A, augmentée de la pression atmosphérique, soit égale à la tension maxima de la vapeur du liquide à cette température. Ce réglage se fait approximativement au moyen d'une graduation tracée sur la glissière.

L'appareil est d'autant plus sensible, et la constance de la température (influencée par les variations de la pression atmosphérique) d'autant mieux garantie que la variation de tension de la vapeur par degré est plus grande, c'est-à-dire le liquide plus volatil. Cependant, un liquide donnant à l'appareil une sensibilité suffisante à la température ordinaire exigerait, pour fonctionner à des températures élevées, que la course de l'interrupteur fût très considérable. On évite l'inconvénient d'une sensibilité trop faible ou d'une course trop grande, en installant, dans les appareils qui doivent fonctionner dans des limites de température très étendues, deux thermorégulateurs destinés respectivement aux températures basses et aux températures élevées. On peut employer, pour le premier, un mélange d'éther chlorhydrique, qui bout, sous la pression normale, à $+11^{\circ}$, et d'éther méthylchlorhydrique, qui bout à -24°. Ce régulateur peut fonctionner entre 0° et 40°, pour une course d'environ 2^{m}. On a, pour la même course, un régulateur fonctionnant entre 40° et 80°, en employant un mélange d'éther éthylique et d'alcool méthylique.

CHAPITRE III.

CAUSES D'ERREURS.

62. Diverses causes d'erreurs. — Nous avons signalé occasionnellement, dans les deux premiers Chapitres, plusieurs causes d'erreurs affectant l'étude des thermomètres à mercure ou la mesure des températures au moyen de ces instruments. Nous étudierons maintenant les phénomènes qui les produisent, et nous en déduirons synthétiquement les lois auxquelles ces erreurs sont soumises. Nous arriverons ainsi à en calculer approximativement la valeur ou à les éliminer par une manière rationnelle d'opérer.

L'étude la plus importante de ce Chapitre sera celle de la *variabilité* des thermomètres, consistant essentiellement en modifications temporaires ou permanentes du réservoir ou du tube thermométrique. La *capillarité*, avec les *retards* dans le mouvement de la colonne mercurielle, qui en sont la conséquence, sera traitée avec quelques détails. Une courte étude sera consacrée au *défaut de sensibilité* des thermomètres due à la conductibilité imparfaite des milieux. Enfin nous discuterons les formules proposées pour tenir compte des erreurs produites par les différences dans la température à laquelle peuvent être exposés le réservoir et la tige du thermomètre.

VARIABILITÉ.

63. Relations entre les diverses variations. — Les variations auxquelles sont soumis le réservoir et la tige d'un thermomètre peuvent être profondes ou superficielles; la masse du verre

tout entière participe aux premières, tandis que les dernières ne sont dues qu'à des modifications de la surface interne de l'enveloppe.

Les éléments sur lesquels ces diverses modifications peuvent agir sont :

1° La position du zéro ;

2° La valeur de l'intervalle fondamental ;

3° Les corrections de calibre ;

4° L'échelle thermométrique donnée par la dilatation apparente du mercure dans le verre.

La position du zéro ne peut varier que par suite d'un changement dans le volume du réservoir.

La valeur de l'intervalle fondamental éprouvera des variations si le coefficient de dilatation du verre se modifie ou si le volume [0·100] varie.

Les corrections de calibre ne peuvent se modifier que si les diverses parties du tube éprouvent des variations non proportionnelles.

Enfin une modification dans l'échelle du thermomètre provient nécessairement d'un changement dans la dilatation du verre (Chap. IV).

Nous voyons donc que la constance de l'intervalle fondamental entraîne celle des corrections de calibre et de l'échelle du thermomètre ; mais le premier de ces éléments peut varier sans que les autres se modifient. Ses variations ne se manifestent en même temps que les autres, que si elles sont produites par les mêmes causes.

Nous étudierons séparément, d'une manière générale, les effets des variations profondes et superficielles.

Variations profondes. — Les variations qui se produisent dans la masse du verre peuvent affecter le volume initial ou le coefficient de dilatation.

La première de ces variations est aisée à constater sur le réservoir ; quant aux variations du volume de la tige, elles sont beaucoup moindres, et l'on ne peut les mesurer que par des expériences très précises.

On peut cependant s'en faire, *a priori*, une idée approximative.

en supposant que toutes les parties d'un thermomètre, soumis en entier aux mêmes influences, éprouvent des variations proportionnelles (¹).

Désignons par M et V les coefficients moyens de la dilatation cubique du mercure et du verre entre 0° et 100°; la dilatation apparente totale du mercure dans le verre entre ces limites sera

$$\Delta = 100(M - V).$$

Or

$$M = 0,000182, \qquad V = 0,000020 \text{ à } 0,000030;$$

donc

$$\Delta = 0,0162 \text{ à } 0,0152 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{61} \text{ à } \frac{1}{66}.$$

Suivant le verre employé, le volume du tube entre 0° et 100° est donc 61 à 66 fois plus petit que celui du réservoir; d'après notre supposition, il en sera de même de ses variations. L'intervalle fondamental éprouvera donc, par suite des changements de volume, des variations qui seront environ 60 fois plus faibles que celles du réservoir.

Mais si, par suite d'un changement dans la composition ou l'état d'agrégation du verre, le coefficient de dilatation du réservoir et de la tige se modifie, cette relation sera détruite.

Si donc, après avoir mesuré exactement les variations du zéro et de l'intervalle fondamental, on trouve, entre ces quantités, un rapport très différent de 60, il deviendra très probable (²) que l'échelle du thermomètre s'est modifiée. Mais, si ce rapport subsiste, il est certain que cette échelle n'a éprouvé aucun changement.

Variations superficielles. — Il peut cependant arriver que,

(¹) Nous reviendrons sur ce point; la supposition que nous faisons ici n'est pas nécessairement exacte, et les résultats que nous en déduirons ne doivent servir qu'à nous orienter. L'étude des variations du réservoir ne dispense pas d'une étude particulière des variations de la tige (73).

(²) La note ci-dessus donne la raison pour laquelle nous disons *très probable* et non *certain*.

Les variations superficielles peuvent aussi modifier ces conclusions; mais les variations de cette nature constatées jusqu'ici ont toujours été extrêmement faibles.

par suite de la formation d'un dépôt sur le verre ou d'un dégagement de matière gazeuse, le tube se rétrécisse ou s'élargisse partout d'une même quantité. S'il est rigoureusement cylindrique, les corrections de calibre, nulles à l'origine, restent nulles; mais il n'en est pas de même si la section du tube est variable.

Il serait aisé, à l'aide des formules développées dans le Chapitre II, de calculer les variations du calibre dans tous les cas où la section peut être exprimée algébriquement en fonction de l'abscisse. Bornons-nous à considérer le cas le plus défavorable possible, où un tube est composé par moitiés d'une partie capillaire cylindrique, comprenant l'intervalle [0·50], et d'une ampoule sphérique de 50° à 100°. Si l'on néglige la superficie de la sphère par rapport à celle du cylindre (1), ce qui rend le résultat encore plus désavantageux, on voit immédiatement que la correction du point 50 éprouve une variation égale à la moitié de la variation de l'intervalle fondamental. Les corrections des points de la section [0·50] seront modifiées proportionnellement à leur distance à zéro. On peut donc affirmer que, par suite des variations superficielles que nous avons supposées, les corrections de calibre d'un point quelconque situé entre 0 et 100 ne peuvent pas être modifiées au delà de la moitié de la variation de l'intervalle fondamental. Cette dernière variation est sans relation aucune avec un changement de volume du réservoir.

Des variations plus fortes ne pourront avoir lieu que s'il se produit des changements profonds ou superficiels locaux, occasionnés par des influences n'agissant que sur une partie du thermomètre. Des variations de cette nature ne peuvent évidemment pas être prévues dans une théorie générale.

VARIATIONS DU ZÉRO.

64. Lois générales. — Nous avons vu, dans le Chapitre I, en quoi consistent les *résidus de dilatation* (2) du verre; ces résidus

(1) Dans les thermomètres de dimensions ordinaires, le rapport de ces surfaces est de l'ordre de $\frac{1}{10}$.

(2) Les *résidus de dilatation* sont en tous points analogues aux *résidus d'élasticité* dont il a été question (47). Un verre qui possède de bonnes qualités élastiques a aussi de bonnes qualités thermiques. Les résidus d'élasticité ont été

sont régis par des lois très complexes, que nous essayerons de résumer. Nous les exprimerons immédiatement au point de vue du phénomène qui nous occupe, la variation du zéro des thermomètres.

Lorsqu'un thermomètre est maintenu à une température constante, la position du zéro remonte peu à peu, et d'autant plus lentement que le thermomètre est plus vieux; cette marche est nommée *ascension lente* ou *marche progressive;* elle peut se prolonger pendant des années, mais la position du zéro tend finalement vers une limite. La marche est d'autant plus forte et la position finale du zéro d'autant plus haute que la température est plus élevée.

Lorsqu'un thermomètre est porté à une température plus élevée que celle à laquelle il a été soumis pendant un temps prolongé, son zéro s'abaisse; lorsqu'on le refroidit, il s'élève. Dans les deux cas, il atteint, après quelque temps, une position sensiblement stable qui dépend de la température et de l'âge du thermomètre; ces variations sont dites *accidentelles;* un abaissement est nommé *dépression,* une élévation *relèvement.*

Les variations accidentelles sont *généralement* beaucoup plus rapides que la marche progressive.

Le temps après lequel la position stable est atteinte dépend, pour une certaine sorte de verre, de la température initiale et finale, du sens et de la rapidité de la variation. Plus la température est élevée, plus l'état stable est atteint rapidement; pour une même température finale, la variation est beaucoup plus rapide à température ascendante qu'à température descendante. En particulier, le relèvement du zéro est beaucoup favorisé par un abaissement très lent de la température; au contraire, lorsqu'un thermomètre est refroidi brusquement, le dernier état stable se maintient, et le nouveau n'est atteint qu'après un temps parfois très long.

Lorsque l'état stable correspondant à une température déterminée et à une époque déterminée est atteint, l'ascension lente peut être observée de nouveau; lorsque la température est va-

---

étudiés en particulier par MM. W. Weber, G. Wiedemann, F. Kohlrausch, Cornu, Hopkinson; les deux espèces de résidus ont été comparées par M. Weidmann [*voir* note p. 107. Cf (65)].

riable, cette ascension est, le plus souvent, masquée par les variations accidentelles. Les changements produits à des températures élevées sur des verres facilement fusibles font exception; le relèvement peut être alors assez rapide pour couvrir les variations accidentelles.

Une dépression produite par une température élevée n'ayant pas encore totalement disparu, les variations du zéro causées par des oscillations peu considérables de la température se produisent comme si le zéro était complètement relevé.

65. **Théorie des résidus de dilatation.** — Bien avant que les lois des résidus d'élasticité ou de dilatation fussent exactement connues, Despretz en avait esquissé la théorie; nous ne pouvons que développer ses idées, en les adaptant aux phénomènes dont les lois principales viennent d'être énoncées.

« Toutes les fois, dit-il [1], que les molécules d'un corps solide éprouvent un déplacement par une cause mécanique, comme la pression, la traction ou la torsion, par une cause physique, comme une élévation ou un abaissement de température, elles ne reprennent pas exactement leurs positions primitives lorsqu'elles sont soustraites à ces causes, c'est-à-dire que, si le volume a été diminué ou augmenté d'une manière plus ou moins considérable par une force quelconque, il reste plus ou moins longtemps diminué ou augmenté après que cette force a disparu. »

Remarquons d'abord que les variations progressives et les variations accidentelles du zéro qui, au premier abord, paraissent en opposition, ne sont que des manifestations diverses d'un même phénomène agissant dans des circonstances très différentes. Il se produit, en effet, dans la fabrication du thermomètre, une dilatation considérable laissant de forts résidus. L'équilibre moléculaire, qui doit régner lorsque les tensions ont totalement disparu, ne tend à s'établir que peu à peu, par une contraction lente de la masse et une ascension du zéro. A chaque température correspond un état définitif que le verre peut atteindre, et dans lequel

---

[1] Despretz, *Observations sur les déplacements et sur les oscillations du zéro des thermomètres à mercure* (*Annales de Chimie et de Physique*, 1re série, t. LXIV, p. 312; 1837).

les tensions sont réduites dans une certaine mesure; plus la température est élevée, plus ces tensions diminuent (1). On sait que, bien avant sa température de ramollissement apparent, le verre est déjà sensiblement visqueux (2); le mouvement des molécules est ainsi grandement favorisé par une élévation de la température.

Cet antagonisme des deux espèces de mouvements du zéro a longtemps dérouté les physiciens; en apparence, la même cause pouvait produire des phénomènes opposés. On observe, en effet, que, si l'on expose un thermomètre de construction récente à une température élevée, le zéro commence par se déprimer, puis il monte ensuite, souvent bien au-dessus de sa première position. Comme nous le verrons, la dépression du zéro se produit assez lentement pour certaines espèces de verre; si, pour ces mêmes verres, l'ascension est relativement forte et rapide (c'est le cas du cristal à base de plomb), il peut se faire que, avant qu'on ait eu le temps de produire une première dépression complète, le zéro soit remonté de manière à couvrir toute la dépression. Si alors on continue à chauffer le thermomètre pendant quelques heures et qu'on abaisse sa température graduellement, on trouve que le zéro s'est considérablement relevé.

Lorsque le zéro a pris sa position stable, une nouvelle élévation de la température produit une dépression qui, cette fois, n'est pas masquée par la marche progressive, car les tensions d'ordre supérieur auront été détruites par le premier échauffement; les tensions produites par celui-ci auront également disparu, et une nouvelle élévation de la température pourra établir de nouvelles tensions, qui se traduiront par un abaissement du zéro.

Les circonstances auront été apparemment les mêmes dans les deux cas, et cependant l'effet produit sera diamétralement opposé; une seule condition était changée, c'était l'état des tensions pri-

---

(1) M. Kohlrausch (*Pogg. Ann.*, t. CXXVII, p. 4; 1866) a démontré que les résidus d'élasticité disparaissent d'autant mieux que la température est plus élevée.

(2) La conductibilité électrolytique du verre (Beetz, Foussereau, etc.) le démontre d'une manière presque certaine.

mitives, encore très fortes dans le premier cas, considérablement diminuées dans le second.

On conçoit qu'en présence de ces faits contradictoires les physiciens aient pu croire pendant longtemps que les variations du zéro des thermomètres n'étaient soumises à aucune loi simple; on voit cependant que l'explication de ces phénomènes est très aisée.

Lors même que des tensions produites par une exposition à une température élevée n'ont pas totalement disparu, d'autres tensions moindres et d'un autre caractère peuvent se produire et disparaître, masquant même l'effet des premières, sans que la marche de celles-ci soit sensiblement dérangée.

Toutes les tensions produites par diverses températures obéissent à des lois semblables; mais l'intensité et la rapidité des phénomènes de dépression ou de relèvement diffèrent, pour chaque espèce de tension, dans une mesure telle que les lois qui les régissent peuvent paraître différentes.

D'après ce qui précède, nous pouvons ajouter aux lois énoncées cette remarque explicative, trop spéciale pour faire partie de l'énoncé d'une loi : Quoique les dépressions soient, d'une manière générale, plus rapides que les relèvements, il peut cependant arriver qu'à une température donnée les tensions résiduelles soient assez fortes et disparaissent assez rapidement pour que les dilatations moindres et d'une autre espèce qui se produisent occasionnent un mouvement descendant du zéro moindre et moins rapide que le mouvement ascendant produit par la disparition des tensions beaucoup plus fortes qui subsistaient avant l'échauffement. Cette remarque ne s'applique qu'à certains verres placés dans des circonstances particulières.

Si, le thermomètre ayant été maintenu pendant quelque temps à une température élevée, on abaisse graduellement la température, les dilatations produites à une température quelconque disparaissent aux températures immédiatement inférieures, et il ne reste pas de tensions dans la masse du verre. Ce fait est très important, parce qu'il nous enseigne qu'on peut arrêter sensiblement la marche progressive du zéro, en chauffant fortement le thermomètre après sa fabrication et en le refroidissant très lentement. Ce procédé est entré, depuis quelques années, dans la pratique

des constructeurs sous le nom de *recuit;* il est, en effet, analogue au recuit des métaux (¹).

66. Hypothèses sur la cause des résidus de dilatation. — A diverses reprises, on a attribué l'ascension du zéro à l'effet prolongé de la pression atmosphérique. Il n'est pas impossible que, même à la température ordinaire, une pression agissant constamment à l'extérieur d'un réservoir de verre diminue son volume; mais l'opinion des observateurs qui se sont le plus occupés de cette question est que le rôle de la pression atmosphérique dans ces phénomènes est, sinon tout à fait nul, du moins difficilement appréciable. Ainsi, d'après M. Crafts (²), « un thermomètre qui est rempli d'azote et qui a un excès de pression intérieure à 355°, a montré, à cette température, la même élévation du zéro que d'autres thermomètres privés d'air. Si l'on soustrait un thermomètre à la pression extérieure de l'atmosphère, en le renfermant dans un tube privé d'air et qu'on le chauffe, on obtient le même résultat. On obtient également une contraction du vase et une élévation du point zéro, tout à fait semblable à celle d'un thermomètre ordinaire à mercure, quand on chauffe à la même température un thermomètre à poids ouvert à l'air. »

Nous ajouterons que des variations tout à fait analogues ont été observées sur des barres de verre exposées à des températures élevées (³).

(¹) Les contractions produites par le recuit dans les métaux ont été étudiées d'une manière particulièrement précise par M. Benoît, qui les a constatées sur tous les échantillons martelés, laminés, tirés à la filière ou rabotés, quelle que fût leur composition chimique (laitons et bronze, or monétaire, etc.). Un cube d'acier trempé, maintenu pendant trois semaines à la température de 30°, se contracta sensiblement, et ses faces devinrent convexes [*Nouvelles études et mesures de dilatations par la méthode de M. Fizeau* (*T. et M.*, t. VI, p. 112; 1888)].

M. Le Chatelier [*Sur la détermination du coefficient de dilatation aux températures élevées* (*Comptes rendus*, t. VII, p. 862; 1888)] a constaté un raccourcissement d'environ 3 pour 1000 d'un barreau d'acier après un recuit à 350°; après un recuit à 900°, la contraction dépassait 5 pour 1000.

(²) CRAFTS, *Sur la cause des variations des points fixes dans les thermomètres* (*Comptes rendus*, t. XCI, p. 370; 1880).

(³) *Voir* H. CALLENDAR, *On the practical measurement of temperature* (*Phil. Trans.*, t. CLXXVIII, p. 161; 1887).

On a allégué fréquemment, pour expliquer les variations du zéro, la théorie suivante, exposée pour la première fois, croyons-nous, par M. Löwenherz [1] :

Lorsque le réservoir d'un thermomètre se refroidit, les couches extérieures se contractent d'abord et compriment les couches intérieures; celles-ci réagissent et distendent les premières. Les couches extérieures restent ainsi dilatées après le refroidissement complet et entraînent une déformation de tout le réservoir jusqu'à ce que les tensions aient disparu.

Les résidus de dilatation seraient ainsi ramenés aux résidus d'élasticité, avec lesquels ils ont de nombreuses analogies.

Cette hypothèse, qui entraînerait la proportionnalité entre les résidus et le maximum de rapidité de l'abaissement de la température, serait déjà réfutée par l'absence de cette proportionnalité; mais elle est en désaccord avec d'autres faits. Un raisonnement très simple suffit pour le démontrer.

Considérons un réservoir cylindrique qui, à un moment donné, subit un refroidissement de l'extérieur. Pour simplifier, supposons-le partagé, par un cylindre concentrique, en deux parties d'épaisseur égale, ayant une température uniforme. Supposons en outre, ce qui est aussi favorable que possible à l'hypothèse, que, pendant le refroidissement, le cylindre intérieur soit rigide et que le cylindre extérieur subisse toute la déformation.

Soient

α le coefficient de dilatation linéaire du verre ;
t la différence maxima de température des deux cylindres ;
k le rapport entre le résidu d'élasticité et la déformation.

La déformation par unité de longueur sera, à un moment donné,

$$\alpha t,$$

et la déformation qui persistera après que le cylindre intérieur aura pris la température du cylindre extérieur sera

$$k\alpha t.$$

---

[1] LÖWENHERZ, *Berichte der chemischen Gesellschaft*. Berlin, 1877.

Or on a, en nombres ronds, pour un cas peu favorable,

$$k = 0,01, \qquad \alpha = 0,00001.$$

La déformation de la partie extérieure sera donc de

$$l.10^{-7}.$$

La déformation linéaire totale sera moitié moindre, mais la variation du volume restera égale à cette quantité.

Or une dépression de 0,6 degré entre 0° et 100°, correspondant à 0,0001 du réservoir, se rencontre fréquemment; elle est 1000 fois plus grande que celle qui correspondrait à une différence de 1 degré entre les deux cylindres concentriques.

Il faut remarquer que, dans cette manière de raisonner, toutes les suppositions sont poussées à l'extrême en faveur de l'hypothèse de M. Löwenherz.

M. Crafts [1] a eu l'idée de soumettre cette hypothèse à un contrôle expérimental très ingénieux. Un thermomètre de grande dimension fut ouvert à l'extrémité. Après que son zéro eut été déprimé, le réservoir fut attaqué à l'acide fluorhydrique jusqu'à ce que l'épaisseur des parois fût réduite d'un tiers environ. On ne constata pas un changement notable dans la position du zéro.

Nous voyons donc que les résidus de dilatation sont un phénomène propre à la dilatation thermique et ne peuvent pas être une simple conséquence des résidus d'élasticité.

67. Marche progressive et déplacements permanents. — Nous donnerons maintenant les résultats numériques relatifs à diverses sortes de verre. Le mieux étudié jusqu'ici est le verre dur français, sur lequel on possède des données assez complètes. Nous prendrons ce verre comme type et nous décrirons en détail ses propriétés thermiques; nous y joindrons les renseignements isolés relatifs aux autres verres, moins importants jusqu'ici pour la Thermométrie.

---

[1] J.-M. Crafts, *Les mesures thermométriques et la détermination des points de fusion et d'ébullition* (*Agenda du Chimiste*, édit. de 1883, p. 338; Hachette).

Comme nous l'avons vu, il n'y a pas de différence de principe entre la marche progressive du zéro, qui se produit à la température ordinaire, et l'élévation occasionnée par un recuit prolongé à une température élevée; cependant les phénomènes observés dans les deux cas diffèrent dans une mesure telle, que leur caractère n'est pas le même. Nous les étudierons séparément.

Ascension lente aux températures basses : a. Verre dur. — Des analyses très précises, faites par M. Tornöe [1] sur des déchets de tubes employés par M. Tonnelot pour la construction des thermomètres, ont donné les résultats suivants :

	Échantillons.		
	N° 1.	N° 2.	N° 3.
Silice	71,85	71,45	71,52
Acide sulfurique (SO^3)	0,73	0,74	0,72
Chlore	traces	traces	traces
Alumine	1,30	1,26	1,57
Peroxyde de fer	0,24	0,29	0,22
Chaux	14,27	14,52	14,55
Soude	11,02	11,17	10,81
Potasse	0,40	0,30	0,37
Magnésie	traces	traces	traces
Protoxyde de manganèse	traces	traces	traces
	99,81	99,73	99,76

La marche du zéro a été observée pour un grand nombre de thermomètres en verre dur. Les nombres qui suivent se rapportent à sept thermomètres Tonnelot (4381-4387), construits en juin 1884 et employés constamment depuis le commencement de 1885. Dans les premiers temps, ces thermomètres furent portés plusieurs fois à 100° et maintenus à cette température pendant quinze à trente minutes; dans la suite, ils ne furent pas exposés à des températures supérieures à 40°. La position du zéro est ramenée à ce qu'elle eût été si ce point avait été déterminé après une exposition prolongée des thermomètres à 0° [2].

---

[1] H. Tornöe, *Sur quelques analyses chimiques faites pour le Bureau international des Poids et Mesures* (*T. et M.*, t. V).

[2] *Dossiers du Bureau international.*

Dates.	Position moyenne du zéro.	Ascension entre deux déterminations.	Ascension par mois.
	°	°	°
23 février 1885....	—0,144	0,023	0,0046
24 juillet 1885.....	—0,121	0,009	0,0022
30 novembre 1885.	—0,112	0,006	0,0015
23 mars 1886.....	—0,106	0,008	0,0009
14 décembre 1886.	—0,098	0,006	0,0007
21 septembre 1887.	—0,092	0,002	0,0002
29 août 1888.....	—0,090		

Nous voyons que, deux ans après la construction des thermomètres, le zéro ne s'élève plus que d'un millième de degré environ par mois. Si donc, après deux ans d'emploi, on détermine la position du zéro à quelques mois de distance, on peut, avec une précision suffisante, calculer sa position pour les époques intermédiaires par une interpolation proportionnelle au temps. A partir de la troisième année, la variation est insensible.

b. Cristal dur français. — M. Tornöe a trouvé, pour le cristal dur français, la composition suivante :

	Échantillons. N° 1.	Échantillons. N° 2.
Silice.....	61,27	60,68
Acide sulfurique (SO^3).....	0,26	0,37
Oxyde de plomb.....	15,88	15,12
Alumine, avec traces de fer et de manganèse.	0,94	0,87
Chaux.....	5,14	5,41
Magnésie.....	traces	traces
Soude.....	9,98	10,59
Potasse.....	6,08	6,55
	99,85	99,62

La marche du zéro a été observée sur deux thermomètres de cette composition (4450 et 4451 de Tonnelot). Ces thermomètres, construits en février 1885, furent portés plusieurs fois à 100°, de mai à novembre 1885, et, en janvier et février 1886, chauffés progressivement de 0° à 50°; ils furent maintenus parfois pendant plusieurs heures à cette température. En avril de la même année, ils furent chauffés à 60°, 70° et 100°; ces derniers échauffements

peuvent déjà être considérés comme un recuit. A partir du mois de mai 1886, ils sont restés à la température ambiante.

Dates.	Position moyenne du zéro.	Ascensions entre deux déterminations.	Ascensions par mois.
	°	°	°
12 mai 1885.....	+0,130		
		0,151	0,0240
21 novembre 1885.	+0,281		
		0,042	0,0099
31 mars 1886.....	+0,323		
		0,053	0,0520
1er mai 1886.....	+0,376		
		0,125	0,0072
21 octobre 1887...	+0,501		

Comme nous le verrons, les dépressions ne disparaissent, dans le cristal, qu'après un temps très long, de telle sorte que les déterminations de la marche progressive sont souvent faussées par les variations accidentelles. L'ascension lente du zéro est près de dix fois plus forte dans le cristal que dans le verre dur.

Ascension produite par le recuit : a. Verre dur. — L'effet des températures élevées sur le verre dur a été étudié par M. Guillaume en 1887 et 1888. Un thermomètre, chauffé fréquemment à 100°, fut exposé successivement aux températures de 120°, 140°, 160°, 180° et 200°; le zéro fut déterminé de temps en temps, et le recuit prolongé à chaque température jusqu'à ce que l'ascension du zéro devînt insensible. On trouva ainsi les ascensions suivantes :

Température.	Durée de l'échauffement.	Ascension.	Ascension totale.
°	h	°	°
120.....	24	0,140	0,140
140.....	16	0,146	0,286
160 (1).....	6	0,018	0,304
180.....	6	0,043	0,347
200.....	6	0,059	0,406

L'ascension totale produite par une exposition prolongée à des températures atteignant 200° est donc de 0,4 degré environ.

(1) Les expériences furent dérangées par un accident.

b. Cristal. — Les variations du zéro, qui se produisent aux températures élevées dans les thermomètres en cristal de diverses compositions, ont été observées fréquemment. Ainsi Person [1] a constaté une élévation du zéro de 12, 15 et 17 degrés dans trois thermomètres chauffés longtemps à 440°.

MM. Sainte-Claire Deville et Mascart ont trouvé, pour trois thermomètres chauffés pendant trois heures à 266°, 206° et 166°, une élévation du zéro de 13,5, 12,5 et 11,4 degrés.

Les expériences les plus complètes dans ce domaine ont été faites par M. Crafts [2]. Un premier groupe de huit thermomètres fut exposé à des températures comprises entre 100° et 355°, puis un second groupe de seize thermomètres à 304° et 355°. Les élévations du zéro, assez variables du reste, ont atteint 26 degrés [3]. La composition du cristal de ces divers thermomètres est malheureusement inconnue.

c. Expériences comparatives. — M. Tonnelot construisit, le même jour, trois thermomètres, respectivement en verre dur, en verre d'Iéna XVIII^{III} (verre normal allemand) [4] et en cristal dur; ces thermomètres furent chauffés ensemble dans du salpêtre, à des températures comprises entre 360° et 380°; le zéro fut déterminé après un refroidissement lent. Les résultats furent les suivants :

	Ascension.		
	Verre dur.	Verre d'Iéna.	Cristal.
	°	°	°
Premier recuit : 10 heures.....	1,80	3,00	7,00
Deuxième » 12 »	2,70	4,40	9,50
Troisième » 10 »	3,09	5,06	10,86

On voit, d'après tout ce qui précède, qu'au point de vue des déplacements du zéro produits par des températures élevées, le

---

(1) PERSON, *Comptes rendus*, t. XIX, p. 1314; 1844.

(2) CRAFTS, *Sur l'élévation du point zéro dans les thermomètres à mercure* (*Comptes rendus*, t. XIC, p. 291; 1880).

(3) Cette élévation du zéro correspond à une contraction du réservoir d'environ 4 pour 1000 ou à un retrait linéaire de 1,3 pour 1000. Il est inférieur à celui que M. Le Chatelier a observé sur l'acier (*voir* note, p. 141).

(4) Pour la composition, *voir* p. 159.

verre dur possède une supériorité marquée sur le cristal et le verre d'Iéna XVIII^{III}.

68. Relation entre la température et la position du zéro. — Les premières recherches systématiques sur la relation qui existe entre la température et la position du zéro ont été faites par M. Pernet et publiées en 1875 (1). La relation à laquelle il est arrivé est la suivante : Soient z_t le zéro correspondant à la température t, k une constante ; on aura

$$z_t = z_0 - kt^2;$$

ou, en désignant par Δ la dépression totale à 100°,

$$z_t = z_0 - \Delta \frac{t^2}{100^2}.$$

Cette relation, trouvée d'abord pour le cristal allemand, a été vérifiée par M. Pernet et M. Benoît pour le cristal français ordinaire. Elle n'est pas exacte aux températures supérieures à 100°, pour lesquelles elle donnerait des dépressions trop fortes.

En 1877, M. Thiesen (2) appliqua, à une série d'observations entre 0° et 100°, les formules

$$z_t = z_0 - at^2,$$
$$z_t = z_0 - at - bt^2,$$
$$z_t = z_0 - at - bt^2 - ct^3,$$
$$z_t = z_0 - at^2 - bt^3.$$

Les résultats étaient naturellement d'autant mieux représentés que la formule contenait un plus grand nombre de constantes à déterminer. M. Thiesen pense que, jusqu'à 50°, la formule du carré suffit ; pour les températures plus élevées, il convient d'employer une expression avec deux ou trois constantes.

M. E.-J. Mills (3) proposa, en 1880, diverses formules expo-

(1) PERNET, *Ueber die Abhängigkeit der Nullpunktsdepression der Normalthermometer von der Temperatur* (*Carl's Rep.*, t. XI, p. 257).

(2) THIESEN, *Vergleichungen von Quecksilberthermometern* (*Metronomische Beiträge*, n° 3, p. 23).

(3) MILLS, *Researches on thermometry* (*Trans. Roy. Soc. of Edinburgh*, t. XXIX, Part II, p. 587 ; 1880).

nentielles pour rassembler les résultats d'expériences dans lesquelles le recuit paraît avoir joué un rôle important; ces formules ne sont donc pas suffisamment motivées.

Enfin, M. Guillaume fit, en 1886, des recherches sur la variation du zéro dans le verre dur et le cristal dur français entre — 10° et 100°. La moyenne des résultats d'expériences très concordantes faites sur six thermomètres en verre dur a conduit à la formule

$$z_t = z_0 - 0{,}0008886\,t - 0{,}0000010\,84\,t^2.$$

Les erreurs résiduelles de ces expériences, faites de 5 en 5 degrés, atteignent une seule fois 0,003 degré.

Plus tard, les expériences furent poussées jusqu'à 190°. La formule

$$z_t = z_0 - 0{,}0008557\,t - 0{,}0000012\,18\,t^2$$

représente très bien les variations entre 0° et cette température.

Pour le cristal dur,

$$z_t = z_0 - 0{,}0007972\,t - 0{,}0000329\,3\,t^2.$$

En posant $t = 50$, dans la formule relative au verre dur, on voit que, entre 0° et 100° (d'après la première formule), la courbe des dépressions ne s'écarte d'une droite que d'une quantité inférieure à 0,003 degré; on peut donc, pour un intervalle de température peu considérable, admettre que la variation est linéaire [1]. Pour le cristal dur, la variation est intermédiaire entre celles du verre dur et du cristal ordinaire, mais plus voisine de cette dernière. Le diagramme suivant (*fig.* 26) représente les dépressions du verre et du cristal durs.

69. Rapidité de la variation. — La rapidité avec laquelle se produisent les ascensions ou les dépressions du zéro dépend de la nature du verre et de la température à laquelle le thermomètre est exposé.

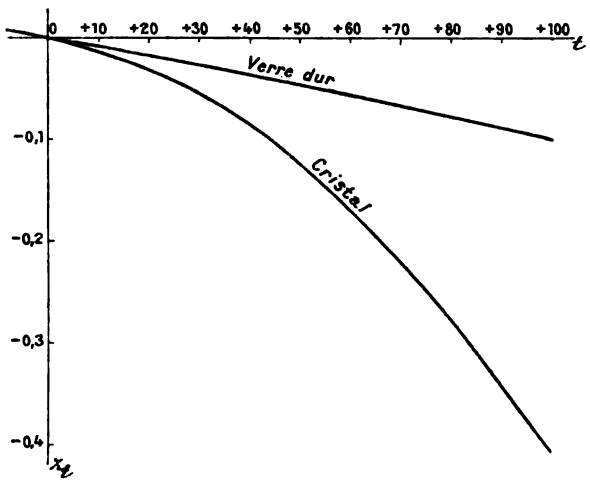
Dans les recherches sur ces mouvements, il est utile de ne pas déranger la marche du zéro, ce qui arriverait si l'on ramenait le thermomètre à 0° pour chaque observation. Or, comme toute l'é-

---

[1] *Voir* Table VI.

chelle du thermomètre se déplace parallèlement, on peut remplacer l'observation à 0° par une lecture du thermomètre à la température à laquelle il est exposé, à la condition que cette température soit constante ou que sa variation puisse être mesurée. Cette observation peut se faire à toute température par comparaison avec un thermomètre dont le zéro ne se déplace plus sensiblement. Pour des températures qu'il est aisé de maintenir constantes, telles que 0° et 100°, ces observations deviennent particulièrement simples et précises.

Fig. 26.



Dépression. — Des recherches sur la rapidité de la dépression à 0° et à 100° ont été faites par divers observateurs.

Les expériences de dépression à 0° sur des thermomètres exposés pendant quelque temps à des températures plus basses ne peuvent être très concluantes, parce que les déplacements sont extrêmement petits. Il est cependant démontré que, lorsqu'un thermomètre a été maintenu pendant quelques heures au-dessous de 0°, le zéro se déprime aussitôt que le thermomètre est plongé dans la glace; par exemple, pour les thermomètres en verre dur exposés à — 10°, le zéro se déprime de 4 à 5 millièmes de degré pendant les vingt premières minutes. Pour les thermomètres en cristal, la dépression s'effectue plus lentement.

A 100°, la marche des phénomènes est très facile à observer. Le thermomètre étant introduit avec précaution dans un appareil à ébullition en activité, on commence à noter la position de l'extrémité de la colonne aussitôt que son mouvement ascendant est terminé. En observant de temps en temps le baromètre, on peut tenir compte des variations de la température de la vapeur.

Des observations faites par M. Guillaume sur un grand nombre de thermomètres en verre dur (¹) ont donné les dépressions suivantes, le temps étant compté à partir de l'instant où la colonne de mercure devient visible entre 99° et 100°.

Époque.	Dépression.
m s	°
0.20	0,0898
0.40	908
1. 0	912
0.30	916
2. 0	920
0.30	922
3. 0	924
7. 0	0,0926

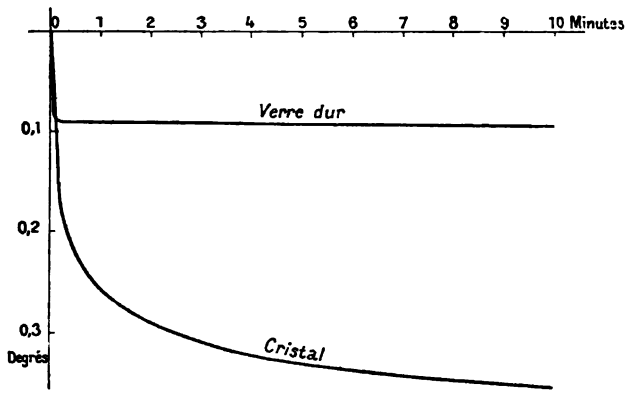
Voici les résultats d'expériences analogues sur deux thermomètres en cristal dur français :

Époque.	Dépression.	Époque.	Dépression.
m s	°	m	°
0.10	0,213	5	0,330
0 25	0,225	6	0,337
0.45	0,256	7	0,342
1. 0	0,261	8	0,348
0.15	0,265	9	0,351
0.30	0,271	10	0,357
0.45	0,278	15	0,367
2. 0	0,287	20	0,376
0.30	0,296	25	0,385
3. 0	0,305	30	0,391
0.30	0,314	35	0,395
4. 0	0,322	40	0,397
0.30	0,326	50	0,400

(¹) Voir *Études thermométriques*, p. 60-61.

Le phénomène est représenté par le diagramme suivant (*fig.* 27), où le temps est porté en abscisses, la position du zéro en ordonnées.

Fig. 27.



La dépression dans le verre normal allemand se produit avec une vitesse analogue à celle avec laquelle elle s'établit dans le verre dur.

On voit que, après une minute d'exposition à 100°, le zéro des thermomètres en verre dur ne se déplace plus sensiblement. Cette propriété, très précieuse, rend ce verre particulièrement propre à la construction des thermomètres hypsométriques. En effet, dans l'emploi de ces instruments, il est souvent nécessaire d'opérer rapidement, et il est presque toujours impossible de déterminer le zéro immédiatement après l'observation de la température d'ébullition de l'eau. Or on peut, avec un thermomètre en verre dur, admettre une valeur du zéro déduite d'autres observations faites dans des conditions analogues. En opérant avec un thermomètre en cristal, il faudrait poursuivre l'exposition à 100° pendant près d'une demi-heure pour obtenir un zéro suffisamment défini; mais alors l'effet du recuit serait déjà sensible et produirait une élévation progressive du zéro dont il serait difficile de tenir compte.

Avec un thermomètre en verre dur, on peut même prendre le point 100 comme point de départ et déterminer la correction de la partie supérieure de l'échelle par des comparaisons avec un ba-

romètre, faites à des intervalles plus ou moins rapprochés, de façon qu'on puisse tenir compte, avec une précision suffisante, de la marche progressive du zéro [*voir* (54)].

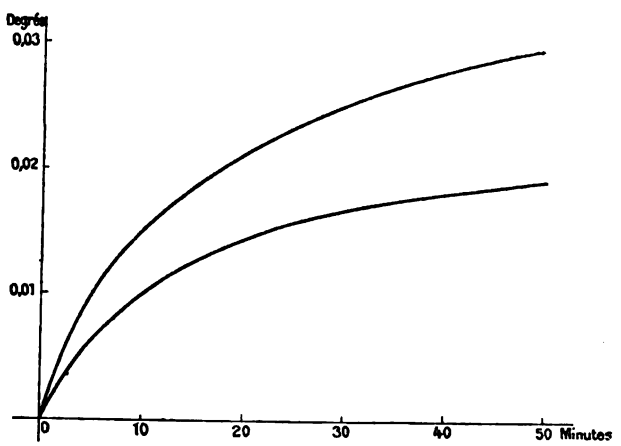
Relèvement. — La marche ascendante du zéro dépend de la dépression produite et de la température à laquelle le thermomètre est exposé. Les expériences sur le relèvement sont très délicates, et, malgré tout l'intérêt qu'il y aurait à connaître exactement ce phénomène, il n'a été que fort peu étudié jusqu'ici.

Le relèvement du zéro (au moins dans les thermomètres en verre dur) jouit d'une propriété singulière : c'est qu'*à une température donnée, la rapidité de l'ascension dans les premiers instants est sensiblement indépendante de la grandeur de la dépression;* la rapidité augmente beaucoup lorsque la température à laquelle le thermomètre est exposé s'élève.

Cette loi n'est probablement qu'approximative, puisqu'il arrive un moment où les courbes de relèvement, après diverses dépressions, doivent se séparer. On peut donc présumer qu'elles s'écartent dès l'origine; mais, dans les limites de la précision des mesures, les courbes du relèvement à 0°, après 50°, 100°, 200°, se recouvrent pendant près d'une heure.

Le diagramme suivant (*fig.* 28) représente la marche du phé-

Fig. 28.



nomène pour le verre dur. Comme précédemment, le temps est

porté en abscisses, la position du zéro en ordonnées. La courbe inférieure est obtenue par la superposition des courbes représentant le relèvement à 0°, après une dépression produite à 50°, 100° et 200°. La courbe supérieure donne le relèvement à 100° après une exposition du thermomètre à 200°.

Les courbes ont un caractère exponentiel, mais elles ne paraissent pas contenues, dans les limites des erreurs d'observation, dans une exponentielle simple.

La vitesse du relèvement diffère beaucoup d'un verre à l'autre. Ainsi, une dépression produite à 100° dans un thermomètre en verre dur disparaît à moitié à 0° dans l'espace de un à deux jours. Le mouvement devient presque inappréciable après une quinzaine de jours. Une dépression produite à 200° est réduite de moitié à 100° après trois heures environ.

Il faut plusieurs jours, quelquefois plusieurs semaines, pour que le zéro des thermomètres en cristal parcoure la moitié du déplacement produit par un échauffement à 100°. Le zéro demeure souvent déprimé pendant plus d'une année.

70. Théorie des erreurs produites par le relèvement. — Les erreurs produites par le relèvement du zéro proviennent de ce que, lorsqu'un thermomètre est ramené d'une température quelconque à 0°, la position du zéro dépend de la rapidité avec laquelle cette température est atteinte. Plus la descente est rapide, plus le zéro est bas. Pour éliminer les erreurs, il suffirait de refroidir toujours le thermomètre avec la même vitesse; la durée du refroidissement devrait varier d'une manière continue d'une température à l'autre. Il faudrait, en particulier, que, dans la mesure des températures voisines de 100°, le refroidissement s'opérât exactement dans les mêmes conditions que dans la détermination de l'intervalle fondamental; de cette manière, l'échelle serait continue et resterait toujours identique.

Mais ces conditions ne sont jamais rigoureusement remplies. Toutes choses égales, d'ailleurs, il est évident que les erreurs qui en résultent sont d'autant moindres que la dépression totale du zéro est plus faible et que la rapidité du relèvement est moindre.

Cependant, à un autre point de vue, un relèvement très lent constitue un désavantage, car il arrive souvent, dans les expé-

riences, que la température s'abaisse avec une lenteur suffisante pour qu'à chaque température la majeure partie de la dépression ait disparu; si, alors, on ne peut pas déterminer le zéro après chaque mesure de la température, on calcule sa position en admettant qu'il est entièrement relevé. Si cette supposition est inexacte, le zéro adopté pour réduire les températures fausse le résultat d'une petite quantité. Il est donc avantageux, suivant les cas, que le zéro se relève vite ou lentement; en général, il vaut mieux que les dépressions disparaissent rapidement.

Le relèvement du zéro est encore trop peu étudié pour qu'il soit possible d'établir une théorie complète des erreurs produites par ce phénomène. On peut cependant déjà donner quelques formules permettant de calculer approximativement leurs valeurs.

Supposons qu'un thermomètre, exposé à la température t_1 jusqu'à ce que son zéro soit complètement déprimé, soit ramené brusquement à la température plus basse t. Le zéro commencera aussitôt à remonter, et sa position en chaque instant sera représentée par une fonction ayant le caractère d'une exponentielle.

Désignons par θ le temps compté à partir du moment où le thermomètre a atteint la température t, par $Z_{(\theta)}$ le zéro à l'instant θ.

$$\text{Pour } \theta = 0 \ldots\ldots \quad Z_{(0)} = z_{t_1},$$
$$\text{»} \quad \theta = \infty \ldots\ldots \quad Z_{(\infty)} = z_t.$$

Entre ces deux instants, la position du zéro est donnée par une fonction encore inconnue, à laquelle nous substituerons la suivante, qui possède un caractère analogue :

$$Z_{(\theta)} = z_t + (z_{t_1} - z_t)\, e^{-k\theta};$$

k est une fonction de t et t_1 qui, comme nous l'avons vu, dépend surtout de t.

Supposons maintenant que la température t varie sans jamais remonter; le mouvement ascendant du zéro sera alors représenté par une série d'équations de la forme ci-dessus, mais dans lesquelles il faudra modifier, pour chaque température, le coefficient k, de manière à tenir compte de l'ascension du zéro depuis le moment initial jusqu'à l'instant où le thermomètre atteint la température considérée.

On voit que le problème, traité d'une manière aussi générale, est extrêmement compliqué et pour ainsi dire insoluble. La solution exacte n'a du reste un intérêt pratique, dans le calcul des erreurs, que dans le cas où la descente de la température est rapide et où le relèvement total est peu considérable ; on peut alors supposer que toute température inférieure à la température initiale est atteinte brusquement, et que le relèvement s'opère d'une manière indépendante pour chaque température. On peut aussi, dans ce cas, développer l'exponentielle en s'arrêtant au premier terme de la série, c'est-à-dire que l'on peut admettre, pour chaque température, un *coefficient de relèvement* qui dépend, dans une faible mesure, de la température initiale; ce coefficient est donné par l'inclinaison de la tangente au premier élément de la courbe de relèvement.

Supposons maintenant, une première fois, que la température du thermomètre passe brusquement de t_1 à t_0. Le zéro sera, au premier instant, z_{t_1}. Supposons, en second lieu, que la température s'abaisse rapidement, mais non plus brusquement dans les mêmes limites. Le zéro observé à t_0 sera un peu supérieur au premier, et la différence entre ces deux zéros pourra être calculée si l'on connaît la marche $t = \varphi(\theta)$ de la température en fonction du temps et la fonction $k = f(t_1, t)$, qui est le premier terme de la dérivée de l'exponentielle. Cette correction sera donc, d'une manière générale, exprimée par

$$c = \int_0^\theta f(t_1, t)\,\varphi(\theta)\,d\theta.$$

Nous pourrons introduire, dans la fonction particulière à t_1, la valeur de t en fonction de θ; donc, en définitive, le coefficient différentiel sera une fonction de θ seul, et l'intégration pourra être effectuée.

Toute supposition sur la fonction $\varphi(\theta)$ implique un cas particulier. Nous ne calculerons donc pas la valeur de l'intégrale ; un calcul élémentaire suffira à montrer quel est l'ordre de grandeur de l'erreur cherchée.

Le relèvement du zéro à 0° est d'environ 0,0015 degré par minute au moment initial. Le relèvement à 100°, après 200°, est

d'environ 0,0027 degré; or, comme la température actuelle influe beaucoup plus sur le coefficient de relèvement que la grandeur de la dépression, on pourra admettre approximativement, comme coefficient moyen de relèvement entre 0° et 100°, 0,0020 degré; c'est-à-dire que chaque minute de la descente produit un relèvement de deux millièmes de degré. Dans des circonstances favorables, on peut refroidir un thermomètre de 100° jusqu'au voisinage de 0° en moins d'une minute; après une deuxième minute, le réservoir a pris la température de la glace; l'élévation totale est de 3 à 4 millièmes de degré. On peut considérer le zéro relevé de cette quantité comme le zéro le plus bas que l'on puisse obtenir pratiquement.

Quelques physiciens appliquent à ce zéro la correction que nous venons de calculer et que l'on a déterminée jusqu'ici par extrapolation. Mais, outre que cette extrapolation est très incertaine, elle complique beaucoup le travail sans correspondre à une définition du zéro pratiquement plus rationnelle que celle que nous avons adoptée.

71. Rôle des composants du verre. — On a fait, dans ces dernières années, de patientes recherches dans le but de déterminer l'influence des différents composants du verre sur les mouvements du zéro. Des expériences très systématiques, faites à Iéna par MM. Abbe et Schott et à Berlin par MM. H.-F. Wiebe et R. Weber, ont amené à découvrir certaines lois et, en particulier, à composer des verres donnant des résidus très faibles (1).

Dans ces expériences, la loi de la variation du zéro n'a pas été étudiée; on s'est contenté de déterminer la dépression qui se produit entre la température ambiante et 100°. On en a déduit la dépression totale entre 0° et 100°, en adoptant, pour la dépression préexistante, la loi de Pernet, généralement admise jusqu'à ces dernières années. Or cette loi ne s'applique pas aux verres difficilement fusibles donnant de faibles dépressions (68). Il en ré-

(1) WIEBE, *Ueber den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern* (*Sitzungsberichte der königlich preussischen Academie der Wissenschaften*, 17 juillet 1884 et 12 novembre 1885). — *Voir* aussi RUDOLPH WEBER, *ibid.*, 13 décembre 1883.

sulte que, pour ceux-là, les nombres trouvés par M. Wiebe sont trop petits.

En effet, supposons qu'avant l'expérience le thermomètre se trouve à la température t. La dépression totale Δ_1 calculée, d'après la dépression observée Δ', en admettant la loi du carré, est

$$\Delta_1 = \Delta' \frac{100^2}{100^2 - t^2};$$

tandis que, si l'on admet une variation linéaire, telle qu'elle se produit dans les verres peu fusibles, la dépression Δ_2 calculée sera

$$\Delta_2 = \Delta' \frac{100}{100 - t}$$

et

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \Delta' \frac{100t}{100^2 - t^2}.$$

Soit, par exemple,

$$\Delta' = 0{,}07 \text{ degré}, \qquad t = 20^\circ;$$

on trouve

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 0{,}015 \text{ degré}.$$

La dépression calculée est donc trop faible de 0,015 degré. La dépression totale pour le verre dur, trouvée par M. Wiebe, est en effet plus faible que celle qui résulte des expériences de M. Guillaume. La différence ne paraît cependant pas parfaitement expliquée par l'erreur qui vient d'être signalée; la rapidité du refroidissement a été probablement plus grande dans les expériences de M. Guillaume que dans celles de M. Wiebe.

Nous réunirons dans les Tableaux suivants les résultats les plus importants trouvés par M. Wiebe.

Ainsi que M. Weber l'a fait remarquer, les verres qui contiennent de la soude et de la potasse en proportions comparables présentent des dépressions beaucoup plus fortes que ceux qui ne contiennent qu'une faible proportion de l'un des alcalis; les trois dernières colonnes des deux Tableaux montrent ce fait d'une manière évidente. La présence de l'oxyde de plomb paraît jouer un rôle moins prépondérant.

VERRES D'IÉNA.

DÉSIGNATION DU VERRE.	ACIDE SILICIQUE.	OXYDE DE PLOMB.	OXYDE DE ZINC.	CHAUX.	BARYTE.	LITHINE.	ALUMINE.	ACIDE BORIQUE.	SOUDE.	POTASSE.	SOUDE / POTASSE.	POTASSE / SOUDE.	DÉPRESSIONS.
II	24	"	"	"	53	"	16	"	7	"	"	0	0,02
XIV^{m}	69	"	7	7	"	"	1	2	14	"	"	0	0,05
XVI^{m}	67,5	"	7	7	"	"	2,5	2	14	"	"	0	0,05
XVIII^{m}	52	"	30	"	"	"	"	9	"	9	0	"	0,05
XIX	50	"	20	"	15	"	"	"	15	"	"	0	0,07
V	54	"	30	"	"	"	"	"	"	16	0	"	0,09
VII	51	3,7	27,7	"	"	6,5	1,8	9,3	"	"	"	"	0,10
XXXI	66	"	"	6	"	"	"	"	11,1	16,9	0,66	"	1,03
XXII	66	"	"	6	"	"	"	"	14	14	1,00	"	1,05
XVII^{m}	69	"	"	"	"	"	5	"	15	10,5	0,70	"	1,06

VERRES DE DIFFÉRENTES PROVENANCES.

DÉSIGNATION DES THERMOMÈTRES.	ACIDE SILICIQUE.	OXYDE DE FER.	ALUMINE.	OXYDE DE PLOMB.	CHAUX.	MAGNÉSIE.	OXYDE DE MANGANÈSE.	ACIDE ARSÉNIEUX.	POTASSE.	SOUDE.	SOUDE / POTASSE.	POTASSE / SOUDE.	DÉPRESSIONS.
Bessel	64,45	0,81		"	12,36	0,22	traces	0,89	20,09	0,86	0,04	"	0,06
Greiner (1848)	64,66	0,53	0,24	"	13,38	0,27	traces	0,87	18,89	1,48	0,08	"	0,15
Greiner (1856)	64,49	0,61	0,42	"	11,56	0,38	0,77	0,35	17,14	3,75	0,22	"	0,38
Geissler (1875)	69,58	0,46	2,09	"	7,90	0,30	traces	0,27	3,97	15,35	0,26	"	0,40
Schulze (1875)	66,53	0,43	2,18	"	9,44	0,21	traces	0,74	3,95	16,15	"	0,24	0,44
Rapp (1878)	66,74	0,30	0,21	"	8,68	0,22	0,08	traces	10,57	12,72	"	0,83	0,65
Cristal anglais	49,49	0,35		33,90	1,20	0,67	0,13	"	12,26	1,54	"	0,13	0,15
Tonnelot (1)	70,96	1,44		"	14,40	0,40	"	"	0,56	12,02	"	0,04	0,07

(1) *Voir* l'analyse probablement plus précise (67).

72. Conséquences pratiques des variations du zéro. — Nous avons mentionné, au commencement de ce Traité (1), la propriété que possèdent les résidus de dilatation de disparaître plus lentement qu'ils ne s'établissent, et nous en avons déduit immédiatement le mode d'emploi rationnel des thermomètres à mercure. Nous pouvons maintenant motiver mieux cette conclusion.

Lorsque l'on compte une température à partir d'un zéro constant, on suppose implicitement que le zéro a atteint, dans chaque cas, la position stable correspondant à la température que l'on mesure. Cette condition peut être pratiquement remplie très approximativement sans que la préparation des expériences soit démesurément longue, dans la mesure des températures élevées (supérieures à 50°), surtout avec les thermomètres en verre dur. Mais, dans le passage d'une température élevée à une température moyenne ou basse (inférieure à 30°), il faudrait maintenir quelquefois le thermomètre pendant plusieurs semaines à la température à mesurer, pour être sûr que le zéro a atteint une position stable.

Dans l'autre manière de calculer, cette supposition n'est plus nécessaire. En effet, supposons que nous mesurions la température t au moyen d'un thermomètre exposé peu auparavant à une température plus élevée; le zéro est alors au-dessous de la position correspondant à t; mais, si l'on plonge le thermomètre dans la glace immédiatement après la lecture, on commettra exactement la même erreur dans la détermination du zéro et dans celle de t; par conséquent, cette erreur se trouvera éliminée du résultat. Si, au contraire, le maximum de dépression n'était pas atteint au moment de la détermination d'une certaine température, la lecture correspondante serait trop élevée, mais le zéro serait aussi trop haut de la même quantité au moment de sa détermination, puisqu'il ne varie que très lentement lorsque le thermomètre est maintenu à 0°.

Dans la première manière de mesurer les températures, on n'est d'ailleurs pas dispensé de déterminer de temps en temps la position du zéro, afin de pouvoir tenir compte de la marche progressive.

Nous admettrons donc qu'en principe une température doit être

comptée à partir d'un zéro variable, déterminé immédiatement après la lecture. Cependant, il arrive fréquemment que cette détermination ne soit pas possible; on peut alors la remplacer :

1° Soit par une interpolation proportionnelle au temps, le thermomètre ayant été soumis à une température à peu près constante entre deux déterminations du zéro, qui peuvent être distantes de plusieurs jours ou même de plusieurs semaines;

2° Soit par une interpolation relative à la température au moyen d'une formule empirique, le zéro ayant été déterminé après les maxima et les minima des températures auxquelles le thermomètre a été exposé, à la condition toutefois que la marche de la température, notamment dans la descente, soit suffisamment lente;

3° Soit en appliquant les corrections données par une *Table des dépressions* (1). L'emploi de cette Table suppose que le thermomètre a été exposé assez longtemps à la température pour laquelle on désire connaître le zéro correspondant. Ce dernier procédé rentre pratiquement dans la première manière de calculer les températures et peut être soumis aux mêmes critiques.

Les procédés 1 et 2 ou 1 et 3 peuvent être combinés; ces derniers doivent l'être en général lorsqu'un thermomètre est employé pendant longtemps à mesurer des températures variables, sans qu'il soit possible de déterminer son zéro. Mais, dans ce cas, le calcul des zéros contient toujours une part d'arbitraire et exige une connaissance minutieuse des propriétés des thermomètres. En effet, si l'on pouvait admettre que deux déterminations du zéro aient été faites sans erreurs, il suffirait de ramener les résultats à ce qu'ils seraient si le thermomètre avait été maintenu pendant longtemps à 0°, puis d'interpoler proportionnellement au temps et d'appliquer alors, à chaque zéro calculé, la correction donnée dans la Table et correspondant à la température mesurée. Dans certains cas, au contraire, il conviendra plutôt de supposer que, entre les deux observations du zéro, la marche progressive a été insensible (67); on admettra alors la moyenne des zéros. Ce dernier mode de calcul devra toujours être employé lorsque, par

(1) *Voir* Table VI.

suite d'erreurs d'observation ou de circonstances établies d'une manière défectueuse, le second zéro réduit sera plus bas que le premier.

EXEMPLE. — *Calcul de la position du zéro d'après les procédés* 1 *et* 3.

Un thermomètre en verre dur a été maintenu pendant quelque temps à 12°; son zéro, corrigé pour le calibre et la pression, est à — 0°,044; on mesure respectivement, après dix, dix-sept et vingt-trois jours, les températures 15°, 35° et 28°; après cette dernière observation, le zéro réduit est à — 0°,056.

Trouver les zéros pour les deux observations intermédiaires.

Le premier zéro correspondant à 12° était à.....	—0°,044
La dépression correspondant à cette température est..	—0,0108
Le zéro correspondant à 0° est donc.....	—0,0332
Le second zéro correspondant à 28° était à.....	—0°,056
La dépression correspondant à cette température est..	—0,0257
Le zéro correspondant à 0° est donc.....	—0,0303

Premier calcul.

L'ascension du zéro a été, en vingt-trois jours, de 0,0029 degré; donc, en un jour, de 0,00013 degré; après dix et dix-sept jours, elle était de 0,0013 et 0,0022 degré.

Les zéros correspondant à 0° étaient, après dix et dix-sept jours, à.....	—0°,0319	—0°,0310
Les dépressions pour 15° et 35° sont.....	—0,0136	—0,0324
Les zéros correspondant à 15° et 35° sont donc.....	—0,045	—0,063

Second calcul.

Admettons la moyenne des deux zéros observés.....	—0°,0317	—0°,0317
Les dépressions pour 15° et 35° sont.....	—0,0136	—0,0324
Les zéros correspondant à 15° et 35° sont donc.....	—0,045	—0,064

VARIATIONS DE L'INTERVALLE FONDAMENTAL.

Un grand nombre d'observateurs se sont occupés des variations de l'intervalle fondamental. Leurs conclusions ont été diverses suivant la précision de leurs mesures et les influences auxquelles les thermomètres avaient été soumis.

73. **Variations produites aux températures peu élevées.** — Dans son Mémoire plusieurs fois cité, M. Pernet a rassemblé les résultats obtenus par ses prédécesseurs [1] sur des thermomètres qui n'avaient pas été exposés à des températures élevées. Il conclut, de la comparaison entre les variations trouvées et leurs erreurs probables, que, par l'effet du temps seul et de températures ne dépassant pas 100°, l'intervalle fondamental des thermomètres ne varie pas.

Les erreurs probables admises par M. Pernet étaient comprises entre 0,003 et 0,035 degré; la première était sans doute évaluée trop bas, de telle sorte que l'invariabilité de l'intervalle fondamental, dans les limites imposées par l'état actuel de la Thermométrie de précision, n'était pas suffisamment démontrée.

Expériences de M. Guillaume. — De nouvelles expériences furent entreprises par M. Guillaume, avec huit thermomètres en verre dur, de la meilleure construction, et complètement étudiés.

Afin de séparer les causes d'erreurs de l'effet à constater, quatre de ces thermomètres servirent de témoins et ne furent chauffés que pendant le temps strictement nécessaire à la détermination de l'intervalle fondamental; les quatre autres furent maintenus, à trois reprises différentes, pendant plusieurs heures, à la température de 100°. Après chaque échauffement, la petite bulle gazeuse qui s'était formée était chassée au-dessus du mercure, et l'intervalle fondamental de tous les thermomètres était déterminé trois fois, à des jours différents, mais, pour les huit thermomètres,

---

[1] Ismaïl-Moustapha, Tissot, Berthelot, Mascart, Louguinine, Dorn, Grunmach, Thiesen, Wiebe, Marek, Benoit.

dans la même journée. Les expériences furent réparties sur un intervalle de plus d'une année.

Voici les résultats moyens de différents groupes de déterminations :

	Thermomètres chauffés.	Thermomètres témoins.	Température ambiante moyenne.
	div	div	°
40 déterminations, mars-juin 1885..	100,0738	100,0845	13,2
24 » nov.-déc. 1885..	100,0803	100,0901	6,9
22 (1) » janv.-mars 1886.	100,0851	100,0946	4,6
24 » avril 1886.....	100,0780	100,0879	11,4

On utilisera le mieux possible les nombres de ce Tableau, en formant les différences des nombres correspondants des deux colonnes, puis les différences entre chacun des nombres ainsi obtenus et tous les précédents.

Voici les résultats de ce calcul :

Premier groupe — second.	Différences.		
—0,0107			
—0,0098	+0,0009		
—0,0095	+0,0012	+0,0003	
—0,0099	+0,0008	—0,0001	—0,0004
Moyenne...	+0,00045 ± 0,00018		

La moyenne des variations surpasse son erreur probable; mais elle est encore inférieure à un demi-millième de degré et, par conséquent, tout à fait insignifiante. On peut donc conclure de là qu'une exposition prolongée à 100° ne modifie pas l'intervalle fondamental des thermomètres en verre dur.

Par contre, en examinant les nombres du premier Tableau, on constate une variation apparente bien accusée de l'intervalle fondamental; les valeurs trouvées augmentent d'abord, puis diminuent et se rapprochent de leur valeur initiale. Une variation périodique est cependant inadmissible, et il faut conclure à une

(1) Dans un des jours d'expérience, un thermomètre de chaque groupe n'était pas disponible.

influence de la température ambiante qui, pendant les expériences, subit des variations analogues.

Cette concomitance des deux variations s'explique en partie par le fait que, plus la température est élevée, plus le refroidissement du thermomètre est lent et plus le zéro est relevé. Il ne semble pas, cependant, que toute la variation observée puisse provenir de ce chef (70), et il est probable qu'une partie doit en être attribuée à la température de la glace, qui était plus ou moins mélangée d'eau suivant la température ambiante.

Il résulte de là que les variations qui ont pu se produire par l'effet du temps seul sont beaucoup inférieures aux limites des erreurs d'observation.

Nous avons déjà signalé, à propos de la détermination de l'intervalle fondamental, les variations apparentes dues à de petites différences dans la manière d'opérer et qui ressortent d'une manière frappante des nombres cités. Si l'on n'en tient pas compte, dans les recherches sur la variation de l'intervalle fondamental, on peut être conduit à des résultats tout à fait erronés.

Remarques. — On calcule ordinairement l'erreur probable d'un intervalle fondamental d'après les différences entre chaque résultat partiel et le résultat moyen. Or, ce qu'il importe de connaître, c'est la *divergence probable* de l'intervalle fondamental de deux thermomètres.

Il est évident, d'après ce qui précède, que, si l'intervalle fondamental d'un thermomètre a été déterminé par un certain nombre d'observations faites dans la même saison, l'erreur probable du résultat doit être beaucoup plus faible que si les déterminations ont été réparties sur toute une année; et, cependant, ce dernier résultat est plus voisin de l'intervalle fondamental moyen d'un grand nombre de thermomètres étudiés à des époques indéterminées.

Si, pour deux thermomètres, l'intervalle fondamental est déterminé à des époques où la température ambiante est très différente, l'erreur de la différence des valeurs admises pour cette constante, dans les deux thermomètres, surpasse probablement la valeur $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, r_1 et r_2 désignant les erreurs probables des intervalles fondamentaux. L'erreur de cette différence est, au con-

traire, inférieure à cette valeur, si l'intervalle fondamental des deux thermomètres est déterminé aux mêmes jours, c'est-à-dire dans des circonstances identiques.

Dans les expériences dont il vient d'être question, les valeurs moyennes de l'intervalle fondamental du premier Tableau sont affectées d'une erreur probable environ trois fois plus grande que celle de la différence moyenne du second tableau; or, d'après la théorie, ces erreurs probables devraient être $\sqrt{2}$ fois plus faibles.

Cet exemple montre combien il faut être circonspect dans toutes les discussions qui touchent aux erreurs probables.

74. Variations dues à l'effet des températures élevées. — *Expériences de M. Crafts.* — En même temps que ses recherches sur les variations du zéro (67), M. Crafts a fait des expériences dans le but d'étudier les variations de l'intervalle fondamental dans les thermomètres en cristal portés à des températures élevées.

Sept thermomètres furent chauffés pendant longtemps à 355°; les variations furent les suivantes (¹) :

Numéro d'ordre du thermomètre.	Déplacement du zéro.	Augmentation de la valeur numérique de l'intervalle fondamental.
	°	°
I	23,0	+0,9
II	24,0	0,45
III	26,0	0,85
IV	16,6	0,5
V	11,0	0,7
VI	15,8	0,8
VII	11,7	0,5
Moyenne...	18,3	+0,67

L'auteur conclut de là que le coefficient de dilatation de l'enveloppe a varié d'environ 2 pour 100. Des expériences analogues sur des thermomètres à poids donnèrent des variations un peu moindres.

Or il est une circonstance que M. Crafts paraît n'avoir pas

(¹) J.-M. CRAFTS, *Sur les variations du coefficient de dilatation du verre* (*Comptes rendus*, t. XCI, p. 413; 1880).

prise en considération, c'est la variation de la tige des thermomètres. Si l'on admet que cette variation est proportionnelle à celle du réservoir (63), on trouve qu'elle doit avoir été, en moyenne, de 0,30 degré pour les sept thermomètres à tige soumis à ces recherches; il ne resterait donc qu'une variation moyenne de 0,37 degré à expliquer par un changement du coefficient de dilatation de l'enveloppe.

Il n'y a pas de raisons pour nier la possibilité d'un pareil changement dans le verre et le cristal, qui sont des corps très complexes dans lesquels la dilatation est soumise à de singulières anomalies. Mais, si ce fait était considéré comme parfaitement prouvé pour le verre, sans une variation correspondante de la composition chimique, il ne donnerait aucun appui à l'opinion de quelques physiciens d'après laquelle le coefficient de dilatation des métaux serait variable.

Expériences de M. Wiebe. — C'est aussi par des variations dans le coefficient de dilatation de l'enveloppe que M. Wiebe [1] a cherché à expliquer les résultats d'expériences qu'il a faites sur trois thermomètres Fuess, de forme allemande. Ces thermomètres furent exposés successivement aux températures de 230°, 300° et 375°; ils ne plongeaient que de quelques centimètres dans le bain, de telle sorte que le tube capillaire n'était échauffé que par conductibilité et par les courants d'air; il ne peut donc pas avoir varié dans la même proportion que le réservoir.

Les ascensions totales du zéro furent respectivement de 14,6, 12,0 et 12,1 degrés; la valeur numérique de l'intervalle fondamental augmenta de 0,37, 0,33, 0,37 degrés. Le rapport des variations est de $\frac{1}{36}$.

M. Wiebe constata, en outre, que l'intervalle fondamental est numériquement plus grand lorsqu'un thermomètre a été refroidi lentement après le recuit qu'après un refroidissement rapide; après un échauffement à 375°, la différence est de 0,05 degré. Il est possible que, dans ce cas, le rôle des variations du tube capillaire ne soit pas tout à fait insignifiant.

---

[1] H.-F. Wiebe, *Ueber die Bewegungen der Fundamentalpunkte von Thermometern* (*Metronomische Beiträge*, n° 3; Berlin, 1881).

La variation du coefficient de dilatation du cristal produite par les températures les plus élevées serait, d'après M. Wiebe, d'environ 2 pour 100; mais les raisons que nous avons données précédemment permettent sans doute de diminuer un peu ce chiffre.

Cette variation, comparée à celle du zéro, est relativement plus forte après les premiers recuits qu'après les suivants.

M. Wiebe attribue la variation du coefficient de dilatation du verre à un dégagement de bulles gazeuses imperceptibles qui se trouvent dans sa masse. Ce phénomène serait analogue à celui qui a été constaté par Lockyer dans le sodium, le potassium et le phosphore, par Dumas dans l'aluminium.

Mais cette explication est peu probable. Les gaz qui se dégagent du verre aux températures élevées sont plutôt condensés à sa surface [1]. De plus, un phénomène qui modifie la dilatation du verre doit agir sur les couches intérieures; or, si l'on admet qu'une bulle gazeuse puisse traverser une épaisseur mesurable de verre, il est certain qu'il peut se produire *a fortiori* un mouvement sensible des molécules, qui tendent vers un état d'équilibre physique et chimique plus stable. Il se forme sans doute de nouvelles combinaisons, avant même que la volatilisation de quantités minimes d'alcalis modifie la composition centésimale.

La preuve que la constitution physique du verre joue aussi un rôle important pourrait être cherchée dans le fait que la valeur de l'intervalle fondamental varie avec le mode de refroidissement. Ce phénomène met en défaut la théorie de M. Wiebe.

---

[1] Depuis de Saussure (1812) et Faraday (1830), la condensation des gaz à la surface des corps solides, et en particulier du verre, a fait l'objet de nombreux travaux. Les plus récents sont les suivants :

P. Chappuis, *Recherches sur la condensation des gaz à la surface du verre* (*Archives de Genève*, 3e série, t. III, p. 439; 1880);

R. Bunsen, *Ueber die Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen* (*Wied. Ann.*, t. XX, p. 545; 1883);

J.-T. Bottomley, *Note on the condensation of gases at the surface of glass* (*Chem. News*, t. LI, p. 85; 1885);

Warburg et Ihmori, *Ueber das Gewicht und die Ursache der Wasserhaut bei Glas und anderen Körpern* (*Wied. Ann.*, t. XXVII, p. 481; 1886);

H. Krause, *Ueber Adsorption und Condensation von Kohlensäure an blanken Glasflächen* (Thèse; Halle, 1888).

Conclusions. — Il résulte de ce qui précède que les températures élevées modifient l'intervalle fondamental des thermomètres et qu'une partie de la variation paraît attribuable à un changement du coefficient de dilatation de l'enveloppe. Mais ces changements n'ont été constatés jusqu'ici que pour des verres dont l'emploi, pour la construction des thermomètres de précision, est tout à fait abandonné, et à des températures auxquelles ces instruments ne sont jamais exposés.

VARIATIONS DU CALIBRE.

75. Observations faites sur les variations des corrections de calibre. — Nous avons analysé (63) les causes possibles des variations que peuvent éprouver les corrections de calibre des thermomètres. Nous allons rendre compte des quelques observations isolées que l'on possède sur ce point.

Observations de M. Pernet sur les thermomètres en cristal. — M. Pernet [1] cite deux thermomètres dans lesquels il a observé une variation des corrections de calibre :

1° Le thermomètre Baudin n° 4392, en cristal, divisé en cinquièmes de degré entre 0° et 100°, fut calibré en 1881 ; après avoir été chauffé fréquemment jusqu'au voisinage de 50°, il fut calibré de nouveau en 1882. On trouva, pour un des points principaux, une différence de 0,0079 degré. M. Pernet en conclut que les corrections de calibre de ce thermomètre ont varié ; mais la variation trouvée ne dépasse que de fort peu les limites de divergence que l'on peut attendre de deux calibrages indépendants d'un thermomètre divisé en cinquièmes et dont les traits ne sont pas très fins.

2° Le thermomètre Baudin n° 4391, de même modèle, fut calibré en 1879. Plus tard, le réservoir fut cassé et refait aux dépens de la tige. Le thermomètre fut porté à la température d'ébullition du mercure et calibré de nouveau en 1882. Les corrections de calibre, pour la plupart positives et inférieures à 0,02 degré dans

---

[1] PERNET, *Comparaisons des mètres dans l'air*, etc. (*T. et M.*, t. IV, p. 45 et 50).

le premier calibrage, devinrent toutes négatives. La variation atteignit — 0,06 degré à 33°.

Un changement de signe des corrections de calibre ne peut s'expliquer que par une forte variation relative des diverses parties du tube. Dans le cas actuel, la partie inférieure, exposée sans doute d'une manière particulièrement intense aux températures élevées, s'est contractée plus fortement que le reste du tube.

Nous pouvons calculer la limite inférieure de la contraction. Supposons que la section [0 · 33] se soit contractée d'une manière uniforme, le reste du tube n'ayant pas varié. Une variation de la correction du point 33, égale à 0,06 degré, correspondrait à un changement de la section [0 · 33] de 0,09 degré; car, dans ce cas, le rapport du volume de cette section au volume total [0 · 100] serait alors égal à

$$\frac{32,91}{99,91} = 0,3294.$$

La variation relative du volume [0 · 33] serait donc

$$\frac{0,09}{33} = 0,0027.$$

Le réservoir d'un thermomètre contenant environ 6250 degrés, cette variation correspondrait à une élévation du zéro d'environ 17 degrés. Ce nombre est du même ordre de grandeur que les variations du zéro observées par M. Crafts.

Observations de M. Guillaume sur les thermomètres en verre dur. — Comme on pouvait le prévoir, les variations constatées dans le verre dur sont beaucoup moindres que dans le cristal. Voici quelques observations faites sur ce verre [1] :

1° Le thermomètre Tonnelot à deux ampoules, modèle 1*f* (4), n° 4256, construit en octobre 1883 et divisé en dixièmes de degré, fut calibré en mars 1884. En mai 1886, la division en trois parties fut refaite, après que le thermomètre eut été chauffé plusieurs fois à 100°. Les différences entre les anciennes et les nouvelles corrections, trouvées pour les points 32 et 66, furent respective-

---

[1] GUILLAUME, *Études thermométriques*, p. 63 et 67.

ment de + 0,0003 et — 0,0005 degré. Ces quantités rentrent dans les limites des erreurs d'observation.

2° Par suite de divers accidents, les thermomètres Tonnelot n^{os} **4248** (une ampoule, modèle 1 *b*), **4388** et **4397** (modèle 1 *f*), appartenant au Bureau international, furent rendus au constructeur pour être réparés et remplis de nouveau; ils furent portés à la température d'ébullition du mercure.

Dans le thermomètre n° **4248**, la correction du point 50 avait varié de + 0,0106 degré.

Pour les deux autres thermomètres, les variations furent les suivantes :

	Thermomètres.	
	4388.	4397.
	°	°
Point 32.....	+0,0018	+0,0071
Point 66.....	+0,0011	+0,0067

Toutes ces variations attestent une diminution des ampoules par rapport au reste du tube.

Les corrections relatives de la partie cylindrique du tube étaient restées invariables dans les trois cas.

ERREURS DUES A LA CAPILLARITÉ.

76. Phénomènes généraux. — Les forces capillaires qui se manifestent entre le mercure et le verre introduisent, dans les indications des thermomètres très délicats, des perturbations d'une nature particulière, dont il est très difficile de tenir compte, et qui, plus peut-être que tout autre phénomène, assignent la limite de la précision qu'il est possible d'atteindre au moyen du thermomètre à mercure.

Une pression capillaire constante exercée par le ménisque aurait uniquement pour effet d'assurer, à température descendante, le retour du mercure dans le réservoir. Mais cette pression varie, et les lectures du thermomètre sont incertaines d'une quantité égale à la moitié de la variation multipliée par le coefficient de pression intérieure du thermomètre.

Les différences du diamètre en divers points du tube sont une première cause de variation de la pression intérieure. Nous avons vu (22) que le mouvement des colonnes de mercure qui en résulte oblige parfois à pencher l'appareil à calibrer, afin que le poids de la colonne fasse équilibre à la force qui agit sur ses extrémités.

Si l'on pouvait admettre que les variations du diamètre du tube sont bien telles que les donne la dérivée de la courbe des corrections du calibre, on pourrait calculer la variation de la pression provenant des imperfections du tube capillaire. Mais la courbe des corrections de calibre est une courbe intégrale, dans l'allure générale de laquelle de fortes variations de la fonction (section du tube) s'étendant sur un très petit espace ne produisent que des irrégularités insignifiantes. On observe, en effet, que les forces qui s'opposent au passage d'une colonne mercurielle par un point d'un tube capillaire ne sont pas justifiées par les variations du calibre déterminées pour des points principaux moyennement éloignés (1^{cm} à 2^{cm}). Il existe donc des irrégularités locales qui échappent à l'interpolation.

Une seconde source d'erreurs réside dans la différence de l'angle de raccordement du mercure avec le verre, suivant le sens du mouvement du ménisque. Celui-ci étant plus fortement courbé lorsque la colonne avance que lorsqu'elle se retire, il en résulte un léger retard dans les indications d'un thermomètre à tube très fin.

Enfin, on observe que, lorsque la tige d'un thermomètre a été fortement chauffée en un point, les colonnes de mercure ont, pendant quelque temps, une tendance à s'en éloigner. On en conclut que la surface du verre se modifie quand on la chauffe, et ne reprend que lentement ses propriétés ordinaires.

Nature des forces capillaires entre le mercure et le verre. Applications. — On sait, par les travaux de nombreux physiciens [1], que le verre fixe, à sa surface, une mince couche d'eau qui tient généralement en dissolution des alcalis et de l'acide carbonique. C'est entre cette couche d'eau et le mercure que pa-

---

[1] *Voir* note, p. 169.

raissent se produire les phénomènes capillaires que l'on observe (1).

La variabilité connue de ces phénomènes devient naturelle dans cette hypothèse, qui explique aussi très simplement comment l'effet d'une température élevée peut se maintenir après le refroidissement.

Partant de là, divers physiciens ou constructeurs ont cherché à donner une plus grande régularité aux phénomènes capillaires qui se produisent dans les thermomètres, en empêchant le dépôt de la couche d'eau à l'intérieur du tube. Il paraît en résulter une diminution considérable des retards produits par les changements de forme des ménisques.

M. Pickering (2), qui a consacré de longs travaux à cette question, conseille de fermer les tubes aussitôt tirés et de ne les ouvrir qu'au moment de souder le réservoir.

Cette pratique ne permet malheureusement pas un choix préalable des tubes en ce qui concerne leur régularité. On en est alors réduit, soit à opérer avec des thermomètres ayant parfois d'énormes corrections de calibre, soit à ne garder que les bons et à perdre le travail fait par le constructeur.

On peut conseiller un procédé inverse, qui paraît, *a priori*, pouvoir être aussi efficace. Les travaux de M. Krause cités plus haut ont montré que la condensation de l'eau à la surface du verre est due aux alcalis qui s'y trouvent (3). Or, en lavant le verre dans l'eau bouillante, on enlève de la surface une partie des alcalis; le verre est alors beaucoup moins hygroscopique et peut être débarrassé plus facilement de la couche d'eau qui le recouvre. Les recherches de M. Krause ont été faites sur du verre contenant environ 21 pour 100 de potasse; après un échauffement à 361°, l'épaisseur de la couche d'eau était de $0^{\mu},00671$ pour le verre naturel, et de $0^{\mu},00305$ pour le verre lavé à l'eau bouillante. L'eau avait com-

---

(1) WERTHEIM, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIII, 168; 1861. — *Voir* aussi VIOLLE, *Cours de Physique*, t. I, p. 666.

(2) SPENCER UMFREVILLE PICKERING, *On delicate calorimetric thermometers* (*Phil. Mag.*, t. 21, p. 330; 1886); *On delicate thermometers* (*Ibid.*, t. 23, p. 401).

(3) Cette opinion a été émise pour la première fois par Faraday.

plètement disparu du dernier à 502°, tandis qu'une température de 531° était nécessaire pour la chasser de la surface du verre naturel.

Il faut remarquer que le verre employé par M. Krause était relativement riche en potasse; on peut en conclure que son attraction pour l'eau était plus forte que celle du verre dur.

Il est probable, d'après cela, que le verre dur lavé à l'eau chaude et chauffé à une température peu supérieure à celle de l'ébullition du mercure ne présenterait pas, au point de vue de la capillarité, des inconvénients aussi marqués que le verre n'ayant subi aucun traitement.

Ajoutons, pour terminer, que les moindres traces d'oxyde dans le mercure ou sur les parois du tube capillaire modifient considérablement l'angle de raccordement du mercure avec le verre et, par conséquent, la pression capillaire. Dans ce dernier cas, les retards sont très considérables. Les thermomètres qui ont subi une réparation présentent fréquemment ce défaut.

77. Calcul des pressions capillaires. — Désignons par F la tension superficielle d'un liquide, par θ' l'angle *aigu* de raccordement avec le verre, par r le rayon d'un tube supposé cylindrique.

D'après la loi de Jurin, la pression P exercée par le ménisque sur le liquide contenu dans le tube, par unité de surface, est

$$P = \frac{2F\cos\theta'}{r}.$$

Si le tube est conique, l'angle au sommet du cône étant 2β, cette quantité doit être multipliée par $\cos\beta$. Dans le cas des thermomètres, nous pouvons négliger ce facteur.

Tube conique. — Supposons un tube légèrement conique. Soient r_1 et r_2 les rayons aux extrémités de la colonne. Lorsque le liquide ne mouille pas le tube, la force s'exerce vers la grande base du cône. Sa valeur est

$$p = 2F\cos\theta'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Dans le cas du mercure et du verre, on peut admettre

$$F = 45\frac{mg}{mm}, \qquad \theta'\,(\text{moyen}) = 42°,$$

d'où

$$2F\cos\theta' = 67\frac{mg}{mm}.$$

Supposons les conditions moyennes suivantes :

$$r_1 = 0^{mm},05, \qquad r_2 = 1,01.0^{mm},05 = 0^{mm},0505.$$

Alors

$$p = 13,4\frac{mg}{mm^2}.$$

C'est à très peu près le poids d'une colonne de mercure de 1^{mm^2} de section et de 1^{mm} de longueur. L'irrégularité supposée dans le calibre du tube ne retiendrait donc qu'une colonne de 1^{mm} de hauteur. Or l'expérience montre que, parfois, des colonnes de plusieurs centimètres se meuvent de bas en haut dans le tube. Il faut en conclure qu'il existe des irrégularités locales beaucoup plus fortes que celle que nous avons supposée, ou que la surface du verre présente de notables différences de structure.

Variations de l'angle de raccordement. — La force exercée sur une colonne de mercure par la différence de courbure des ménisques est analogue, pour ses effets, à un frottement; elle est capable de tenir en suspension, dans les tubes fins, une colonne de plusieurs centimètres de longueur que l'on ne peut déplacer que par des secousses ou des chocs.

Soient θ'_1 et θ'_2 les angles de raccordement des ménisques; nous aurons

$$p = \frac{2F}{r}(\cos\theta'_1 - \cos\theta'_2).$$

Si l'on suppose ces angles constants pour diverses valeurs de r dans de larges limites, le facteur entre parenthèses sera constant, et l'on aura

$$p = \frac{c}{r}.$$

La hauteur de la colonne de mercure en suspension dans un tube capillaire est donc inversement proportionnelle au rayon du tube, aussi loin, du moins, que les suppositions précédentes sont exactes. Nous y reviendrons bientôt.

On sait que Jamin est parvenu à équilibrer des pressions de plusieurs atmosphères au moyen de *chapelets capillaires* (¹).

78. Étude expérimentale du phénomène. — Il n'est pas certain, *a priori,* que les données générales sur la capillarité conviennent parfaitement au cas du mouvement d'un fil de mercure dans un tube très étroit, en sorte qu'il n'est pas inutile d'étudier le phénomène sur les thermomètres eux-mêmes.

On choisit, pour cela, parmi des thermomètres calibrés, ceux dont le tube est bien régulier. Les dimensions extérieures du réservoir ayant été mesurées, on calcule l'épaisseur des parois à l'aide du coefficient de pression (49). On connaît ainsi approximativement le volume du réservoir, d'où l'on déduit celui du degré en divisant par 6250 et, par suite, le rayon du tube.

On cherche ensuite, par tâtonnements, une colonne de mercure d'une longueur telle qu'elle se déplace très lentement dans les parties régulières du tube, lorsque celui-ci est vertical; en penchant légèrement le thermomètre, on arrive à trouver une inclinaison pour laquelle la colonne cesse de se déplacer.

Le phénomène n'est pas très régulier, et les nombres obtenus sont assez discordants, en sorte qu'il peut régner quelque incertitude, même sur une moyenne d'un grand nombre d'expériences.

Voici quelques résultats obtenus par cette méthode sur des thermomètres en verre dur :

Rayons.	Colonnes en suspension.
mm	mm
0,052	46
0,062	38
0,067	35
0,072	34

L'effet simultané des deux ménisques est égal à la différence des pressions exercées par la colonne de mercure sur le réservoir d'un thermomètre à température ascendante ou descendante. En multipliant la longueur de la colonne en suspension par le coeffi-

(¹) JAMIN, *Comptes rendus,* t. L, p. 172, 311 et 385; 1860.

cient de pression intérieure, on doit trouver la différence entre les indications du thermomètre pour une même température, suivant qu'elle est atteinte en montant ou en descendant. On peut ainsi calculer l'erreur et appliquer une correction égale à la moitié de la différence. Cependant, il reste toujours, sur cette correction, une légère incertitude provenant de l'irrégularité du phénomène.

Nous pouvons tirer, des nombres qui précèdent, une conclusion d'un intérêt plus général.

En introduisant dans l'équation

$$pr = c$$

les valeurs correspondantes de p et de r, on trouve la valeur moyenne

$$c = 32,4\,\frac{\text{mg}}{\text{mm}} = 2\,\text{F}(\cos\theta'_1 - \cos\theta'_2),$$

d'où (77)

$$\cos\theta'_1 - \cos\theta'_2 = 0,36.$$

En supposant que θ'_1 et θ'_2 s'écartent également de 42°, on trouve

$$\theta'_1 = 26^\circ, \qquad \theta'_2 = 58^\circ.$$

Il est très facile d'observer la différence entre les lectures à température ascendante et descendante, et même de la mesurer, lorsqu'elle est un peu forte, au moyen de l'appareil à ébullition précédemment décrit (52).

Le tube dans lequel est placé le thermomètre étant vertical, on le penche de façon que la colonne monte; puis on le redresse et l'on note la position du ménisque. On retire ensuite la flamme, et, aussitôt que la température baisse, on la replace sous la chaudière. Au bout d'un instant, le mercure se fixe dans une position un peu inférieure à celle qu'il avait occupée précédemment [1].

---

[1] Pour les thermomètres Tonnelot de forme ordinaire, la correction paraît être comprise entre 2 et 3 millièmes de degré.

M. Pernet [*Ueber die durch Capillarkräfte bedingten Correctionen* (*Zeitschrift für Instrumentenkunde;* nov. 1886)] cite un thermomètre pour lequel la correction atteignait 0,06 degré.

79. Influence des dimensions du thermomètre. — Il est important, pour établir les règles à suivre dans la construction des thermomètres de précision, de se rendre compte de la relation qui existe entre les dimensions des thermomètres et la grandeur des erreurs que nous venons d'étudier.

On se sert fréquemment, pour des recherches précises, de thermomètres (auxiliaires) dont le degré, très long, est divisé en cinquante ou cent parties. Or l'avantage est souvent illusoire; car il est aisé de démontrer que, plus le degré est long, plus l'effet du retard capillaire est considérable.

On peut allonger le degré, soit en augmentant le volume du réservoir, soit en diminuant le rayon du tube capillaire; nous étudierons les deux cas séparément :

1° Supposons un réservoir cylindrique, assez long pour que l'effet des bases soit négligeable. Des raisons pratiques s'opposent à ce que le réservoir d'un thermomètre dépasse une certaine longueur (au delà de 5 ou 6^{cm}, les manipulations deviennent difficiles); si donc on veut augmenter son volume à partir d'une certaine limite, on est conduit à agrandir son rayon.

Or le coefficient de pression intérieure du réservoir seul (**44**) est sensiblement proportionnel à $\frac{R}{e}$. La compressibilité du mercure s'ajoute à la déformation, de sorte qu'on peut écrire

$$\beta_i = a\frac{R}{e} + b\varkappa_m,$$

a et b étant des constantes.

Pour des thermomètres de dimensions ordinaires, le premier terme est trois à quatre fois plus grand que le second.

Remarquons d'abord que e ne peut pas être augmenté au delà d'une certaine limite; car, en agrandissant le réservoir, on diminue la proportion entre la surface et le volume, ce qui rend le thermomètre moins sensible. Pour conserver la même sensibilité en augmentant les dimensions du réservoir, il faudrait, au contraire, diminuer e. Enfin, au delà d'une valeur déterminée de e, le second terme devient prépondérant.

Supposons donc que l'on ait atteint une limite pour l'épaisseur des parois et qu'elle ne soit plus modifiée. Nous pourrons écrire

$$\beta_i = a'R + b\varkappa_m.$$

Soient V le volume du réservoir, l la longueur du degré. En désignant par c, f et c' trois nouvelles constantes, nous aurons, le rayon du tube étant constant,

$$R = c\sqrt{V},$$
$$l = fV,$$

d'où

$$R = c'\sqrt{l},$$

Par conséquent,

$$\beta_i = a''\sqrt{l} + b\varkappa_m.$$

Il résulte de là que, si l'on augmente la longueur du degré en agrandissant le réservoir, le coefficient de pression augmente, à partir d'une certaine constante, proportionnellement à la racine carrée de la longueur du degré. L'erreur produite par le retard capillaire augmente suivant la même loi.

2° Supposons, en second lieu, que la capacité du réservoir soit constante.

Désignons par r le rayon du tube capillaire.

Nous pouvons écrire, en introduisant la nouvelle constante h,

$$l = \frac{h}{r^2}, \qquad \text{d'où} \qquad r = \sqrt{\frac{h}{l}}.$$

Or, d'après ce qui a été dit, la pression capillaire dynamique p est inversement proportionnelle à r; donc

$$p = h'\sqrt{l}.$$

Dans ce cas, la pression augmente donc encore proportionnellement à la racine carrée de la longueur du degré, mais à partir de zéro. Il en est de même du retard capillaire.

On voit donc que, de quelque manière que l'on allonge le degré, l'erreur résultant du retard capillaire augmente sensiblement suivant la racine carrée de la longueur du degré.

En augmentant la longueur du degré, on diminue les erreurs de lecture, mais l'avantage cesse dès que les erreurs de capillarité atteignent le même ordre de grandeur. La limite qu'il convient de ne pas dépasser dans la longueur du degré varie suivant l'usage auquel le thermomètre est destiné. Il est des cas où l'on peut éli-

miner l'erreur ou en tenir compte; les inconvénients sont alors diminués. Mais l'expérience a montré qu'avec des tubes en verre ordinaire n'ayant subi aucune préparation il ne faut guère dépasser une longueur de 1^{cm} par degré.

80. Élimination des erreurs. — On peut, comme il a été dit, déterminer l'erreur de capillarité et appliquer une correction positive ou négative aux lectures du thermomètre, suivant le sens de la variation de la température.

Lorsque la température est constante, on peut aussi réduire beaucoup cette erreur, et même la rendre pratiquement nulle, en donnant de légers chocs au thermomètre, dès que cette température est atteinte. Ce procédé peut être particulièrement recommandé dans la détermination du zéro et du point 100. Mais, à température variable, l'équilibre rétabli après chaque choc est aussitôt détruit par la marche du ménisque.

Dans certains cas où l'on ne mesure qu'une différence de température, on peut éliminer l'erreur en disposant les expériences de manière que les deux températures extrêmes soient atteintes dans le même sens. Mais, si la température passe par un maximum ou un minimum, ce procédé est en défaut.

Nous décrirons la marche à suivre pour éliminer l'erreur de capillarité dans deux cas importants.

Application à la détermination des coefficients de pression. — Dans la détermination du coefficient β_e (45), on établit une marche ascendante de la température, afin que les lectures diffèrent à chaque observation; mais cette marche a aussi pour effet de diminuer et même d'éliminer les erreurs de capillarité.

En effet, lorsqu'on opère à température constante, le ménisque est toujours ascendant dans les lectures de rang impair, descendant dans les autres; leur différence est donc diminuée d'une quantité constante. Si, au contraire, la marche de la température est assez forte, et si on laisse écouler un temps suffisant entre l'inversion de la pression et la lecture, on arrive à obtenir un ménisque identique dans les deux genres de lectures; l'erreur est ainsi éliminée.

En augmentant graduellement la marche, on constate, par des

mesures précises, que le nombre obtenu pour le coefficient de pression augmente jusqu'à une certaine limite [1].

Nous donnerons comme exemple les résultats d'expériences faites sur un thermomètre hypsométrique (Tonnelot, n° 4529) dont le degré a 11^{mm} de longueur (diamètre du tube, $0^{mm},104$).

Les lectures étaient faites à vingt secondes d'intervalle, c'est-à-dire seize secondes après que la pression avait été établie. On a désigné par *marche* l'ascension moyenne qui se produisait pendant ce temps.

Marche.	$10^6.\beta_e$ obs.	$10^6.\beta_e$ calc.	$10^6.\delta$.
0,000 30	123,67	124,02	— 0,35
0,000 80	126,23	124,56	+ 1,67
0,000 84	123,41	124,60	— 1,19
0,001 68	125,19	125,52	— 0,33
0,001 76	126,10	125,60	+ 0,50
0,003 50	126,92	127,49	— 0,57
0,003 50	127,29	127,49	— 0,20
0,004 56	129,12	128,65	+ 0,47

D'après la nature du phénomène, il est probable que le coefficient trouvé doit croître, entre certaines limites, proportionnellement à la marche. A partir d'une certaine marche, il ne doit plus se produire aucune augmentation.

Posons

$$\beta_e = a + bm,$$

a et b étant des constantes à déterminer, m désignant la marche.

En appliquant la méthode des moindres carrés aux nombres qui précèdent, on trouve, m étant exprimé en millièmes de degré,

$$a = 123,690.10^{-6},$$
$$b = 1,087.10^{-6}.$$

On voit, par la répartition des erreurs résiduelles, que la limite de marche, à partir de laquelle β_e ne varie plus, ne paraît pas avoir été atteinte dans ces expériences. Mais, en augmentant encore un peu la marche de la température ou en espaçant davan-

[1] *Études thermométriques*, p. 34.

tage les lectures, on serait arrivé, pour β_e, à une valeur constante, probablement inférieure à 130.10^{-6}.

Application à la détermination du degré des thermomètres auxiliaires. — Nous avons montré (**41**) comment on détermine la valeur du degré dans les thermomètres auxiliaires, et nous avons fait remarquer que l'équation exprimant implicitement que les thermomètres concordent à 0° n'existe pas sans restrictions.

En effet, si les thermomètres sont comparés à température ascendante, le zéro étant déterminé à température descendante, il existe, entre les indications de l'étalon et du thermomètre auxiliaire, une différence égale à la double différence de leurs erreurs de retard capillaire.

On éliminerait théoriquement l'erreur, en effectuant des comparaisons à température descendante. Mais la marche des thermomètres est moins régulière dans ce sens que dans l'autre, et il vaut mieux éliminer, par le calcul, l'erreur donnée par les comparaisons.

Il suffit, pour cela, d'introduire dans les équations une erreur de départ qu'on laisse inconnue. En d'autres termes, on conserve la forme générale des équations qui conviennent aux thermomètres calorimétriques.

Nous donnerons un exemple de ce calcul, extrait du dossier du thermomètre n° **4529**.

La détermination du degré a été faite par des comparaisons à température ascendante avec deux thermomètres étalons et un autre thermomètre hypsométrique. Ces comparaisons ont donné les résultats suivants :

	Corrections.		
Température.	Obs.	Calc.	Obs.— Calc.
5°	+0°,0013	+0°,0018	—0°,0005
7,5	+0,0003	—0,0007	+0,0010
10	—0,0037	—0,0032	—0,0005

En introduisant, dans l'équation $z_a = u + av$, les valeurs de a et z_a données dans les deux premières colonnes, on trouve

$$u = +0^\circ,00680,$$
$$v = -0^\circ,00100.$$

L'effet capillaire produisait donc, dans les circonstances de ces expériences, une divergence de 0,0068 degré entre le thermomètre hypsométrique et les étalons. La correction par degré (— 0,001) est libérée de l'erreur.

DÉFAUT DE SENSIBILITÉ.

81. Nature des phénomènes. — Un thermomètre, placé dans un liquide ou un gaz, n'atteint pas instantanément la température du milieu qui l'entoure. Si cette température est constante, elle n'est théoriquement jamais atteinte ; dans la pratique, il suffit de connaître le temps nécessaire pour que la différence soit inférieure à une limite donnée, par exemple un millième de degré.

Mais le problème se pose rarement sous cette forme ; il se présente ordinairement sous la forme suivante : La température d'un milieu donné variant d'une manière uniforme, il s'agit de connaître la différence entre la température du milieu et celle d'un thermomètre qui s'y trouve plongé.

Cette différence est nommée *retard* du thermomètre.

Posé de cette manière, le problème ne permet pas une solution expérimentale simple ; mais il peut être ramené immédiatement à la première forme à l'aide du raisonnement suivant : Supposons d'abord que la température du milieu soit invariable. Le thermomètre s'approche asymptotiquement de cette température, et la rapidité de sa variation diminue constamment. Supposons maintenant qu'à un moment donné la température du milieu commence subitement à varier avec la même rapidité que celle du thermomètre. La différence entre la température du milieu et celle du thermomètre deviendra constante, et le thermomètre aura précisément le retard correspondant à la marche de la température du milieu ambiant.

Ce retard dépend de la nature du milieu lui-même, de son mouvement et des dimensions du thermomètre. Toutes choses égales d'ailleurs, il est sensiblement proportionnel au rapport du volume du réservoir à sa surface.

Dans la plupart des expériences dans lesquelles on emploie des thermomètres de précision, la marche de la température est assez

faible pour que le retard soit négligeable. Les expériences dans les gaz et certaines expériences de calorimétrie font cependant exception.

82. Équations du problème. — Les phénomènes qui produisent le retard se rapportent à la conductibilité intérieure ou extérieure du milieu ambiant du verre et du mercure [1]. Nous pouvons admettre, avec une approximation très supérieure à celle dont nous avons besoin, que le gain ou la perte de chaleur du thermomètre par unité de temps est proportionnel à la différence entre la température du thermomètre et la température moyenne du milieu ambiant.

Soient

U la température constante du milieu ambiant;
u la température variable du thermomètre;
λ une constante positive, dite *constante de sensibilité;*
t le temps.

En supposant, pour fixer les idées, $u > U$, on aura la relation

$$(1) \qquad -\frac{du}{dt} = \lambda(u - U),$$

d'où

$$(2) \qquad u - U = e^{-\lambda t + c}.$$

Pour $t = 0$,

$$u = u_0 \quad \text{et} \quad u_0 - U = e^c;$$

donc enfin

$$(3) \qquad \frac{u - U}{u_0 - U} = e^{-\lambda t}$$

ou

$$(4) \qquad \lambda t = \operatorname{Log} \frac{u_0 - U}{u - U}.$$

---

[1] En réalité, le phénomène est extrêmement complexe. La différence de température entre le verre et le mercure augmente encore le retard. Lorsqu'on plonge brusquement le réservoir d'un thermomètre dans un bain à température élevée (50°-70°), on voit généralement la colonne baisser d'abord puis monter aussitôt rapidement.

En désignant par $u_1, u_2, u_3, \ldots$ les températures correspondant aux époques $t_1, t_2, t_3, \ldots$, nous aurons les relations

$$(4') \quad \begin{cases} \lambda t_1 = \operatorname{Log} \dfrac{u_0 - U}{u_1 - U}, \\ \lambda t_2 = \operatorname{Log} \dfrac{u_0 - U}{u_2 - U}, \\ \lambda t_3 = \operatorname{Log} \dfrac{u_0 - U}{u_3 - U}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

d'où

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda(t_2 - t_1) = \operatorname{Log} \dfrac{u_1 - U}{u_2 - U}, \\ \lambda(t_3 - t_2) = \operatorname{Log} \dfrac{u_2 - U}{u_3 - U}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ou, plus généralement,

$$(5') \quad \lambda(t_n - t_m) = \operatorname{Log} \frac{u_m - U}{u_n - U}.$$

Chaque équation de cette forme peut servir à calculer λ. Cette quantité sera ainsi déterminée par la variation d'un thermomètre placé dans un milieu à température constante. Connaissant λ, on pourra calculer le retard correspondant à une marche donnée de la température du milieu.

Pour cela, nous mettrons l'équation (1) sous la forme

$$(1') \quad u - U = -\frac{1}{\lambda}\frac{du}{dt}$$

ou, pour $U > u$,

$$(1'') \quad U - u = \frac{1}{\lambda}\frac{du}{dt}.$$

La constante $\frac{1}{\lambda}$ a la dimension d'un temps; elle représente le temps nécessaire pour que la variation actuelle du thermomètre supposée constante fasse parcourir à celui-ci l'intervalle qui sépare sa température de celle du milieu; en d'autres termes, pour qu'elle annule le retard.

Supposons que la température d'un thermomètre varie suivant

l'équation

$$u = f(t).$$

On en déduira la température du bain, à une quantité de second ordre près, par la relation

$$U = f(t) + \frac{1}{\lambda} f'(t).$$

83. Détermination expérimentale de λ. — Pour calculer λ, il faut connaître les valeurs correspondantes de t, u et U à introduire dans les équations (5). On observe, dans ce but, la marche d'un thermomètre, préalablement chauffé ou refroidi, placé dans un bain à température constante. Pour ces observations, deux procédés inverses peuvent être mis en usage; on note soit les indications du thermomètre à des époques équidistantes, soit l'instant où le thermomètre atteint des températures également espacées. Le second procédé, qui permet l'emploi du chronographe, est généralement préférable.

Un observateur suit à la lunette ou à la loupe la marche du ménisque et inscrit au chronographe son passage sur des traits équidistants, tandis qu'un aide note au fur et à mesure, sur la bande, les températures correspondantes.

La température U peut être déduite de l'ensemble des dernières observations; mais il vaut mieux la déterminer au moyen d'un second thermomètre placé à côté du premier.

Ainsi que l'a fait remarquer M. Thiesen [1], il n'y a pas lieu d'appliquer à ces observations une méthode rigoureuse de calcul. En effet, les deux quantités observées, le temps et la température, sont également incertaines; de plus, la quantité λ, pour un même thermomètre, dépend dans une forte mesure des conditions particulières de l'expérience, et il serait illusoire d'essayer de la déterminer avec une grande précision.

Voici la méthode de calcul employée par M. Thiesen. On tire de l'équation (4)

$$\log(u - U) = A - M\lambda t, \tag{6}$$

---

[1] MAX THIESEN, *Vergleichungen von Quecksilberthermometern* (*Metronomische Beiträge*, n° 3; Berlin, 1881).

A étant une constante et M désignant le module des logarithmes vulgaires (0,4343). C'est l'équation d'une droite dont t est l'abscisse et $\log(u - U)$ l'ordonnée.

En portant sur du papier quadrillé les valeurs correspondantes de t et du logarithme, on obtient une série de points dont les écarts par rapport à une droite permettent d'estimer les erreurs d'observation et l'inexactitude des suppositions sur lesquelles repose la théorie. La droite peut être déterminée par un procédé graphique, et λ se déduit de son inclinaison.

Les erreurs de ces mesures sont généralement très grandes; de plus, les points s'écartent systématiquement d'une droite. L'écart est plus fort à température descendante qu'à température ascendante. La cause de ce fait est aisée à trouver. La théorie élémentaire que nous avons exposée ne s'occupe que de la variation de la température du réservoir et ne tient pas compte des phénomènes qui accompagnent l'écoulement du mercure dans le tube capillaire. Or, dans un mouvement rapide, la résistance à l'écoulement est très grande et modifie considérablement sa vitesse. Lorsque la température baisse, les seules forces qui provoquent la rentrée du mercure dans le réservoir sont la capillarité, la pesanteur et l'adhérence du mercure. Il est fort possible que, dans ce cas, il se produise un vide dans le réservoir. Au contraire, lorsque la température s'élève, la pression à l'intérieur du réservoir peut devenir très considérable, de telle sorte que les perturbations produites par la résistance à l'écoulement sont beaucoup moindres que dans le premier cas.

En opérant sur divers thermomètres de forme allemande, plongés dans l'eau tranquille, M. Thiesen a trouvé pour $\frac{1}{\lambda}$ des valeurs variant entre 7 et 30 secondes.

CORRECTION POUR LA COLONNE ÉMERGENTE [1].

84. Théorie. — L'indication d'un thermomètre à mercure a été précédemment définie en supposant l'égalité de la tempéra-

---

[1] Il n'existe pas, à notre connaissance, en français, d'expression consacrée pour désigner la correction que l'on nomme en allemand *Correction für den*

ture de toutes ses parties. Or il est de nombreuses expériences dans lesquelles cette condition ne peut être satisfaite; une partie de la tige est soumise à une température différente de celle de l'étuve ou du bain dans lequel le réservoir est plongé. La correction qu'il est nécessaire d'appliquer aux lectures pour les ramener à leur définition peut alors devenir très considérable, et, si les éléments de la réduction sont imparfaitement connus, l'emploi de thermomètres précis devient tout à fait illusoire.

Avant tout, il faut chercher à réduire à un minimum la correction en question, en adaptant le mieux possible la forme des thermomètres aux expériences que l'on se propose de faire.

Dans de nombreuses recherches, notamment en Calorimétrie, il suffit de mesurer un intervalle de quelques degrés dont l'origine peut être choisie arbitrairement entre certaines limites. Il est avantageux, dans ce cas, de se servir de thermomètres à échelle fractionnée [*voir* (4) et (41)], dans lesquels la partie utile de la division commence aux températures les plus basses que l'on se propose de mesurer. Toute la partie inférieure à cette fraction d'échelle reste plongée dans le bain, et la correction ne porte que sur l'excès variable pendant l'expérience.

Il est aisé de donner l'expression *théorique* de cette correction.

Considérons un thermomètre dont le réservoir est soumis à la température t. Soient

t' la température d'un élément dx de la tige;

α le coefficient moyen de la dilatation apparente du mercure dans le verre entre t et t'.

Supposons $t > t'$. L'élément dx devra subir la correction

$$dC = \alpha(t - t')\,dx.$$

La correction totale sera donc, en supposant, pour simplifier, α constant,

$$C = \alpha \int_0^n (t - t')\,dx = \alpha n \left(t - \frac{1}{n}\int_0^n t'\,dx\right).$$

---

herausragenden Faden, et en anglais *exposure correction.* La dénomination que nous avons adoptée nous paraît désigner exactement, en peu de mots, la chose dont il s'agit.

L'origine o est supposée au niveau du bain, mais pourrait être déplacée arbitrairement *au-dessous*; n est l'extrémité de la colonne.

Pour effectuer l'intégration, il faut remplacer t' par sa valeur en fonction de x; en d'autres termes, il faut connaître l'expression de la répartition de la température le long de la tige. Si x est exprimé en degrés, la correction est aussi exprimée en degrés; n est alors le nombre de degrés émergents.

Posons

$$\frac{1}{n}\int_0^n t'\,dx = \tau;$$

τ est la température moyenne de la colonne émergente.

On peut admettre pour α une valeur comprise entre 0,000152 et 0,000162 suivant le verre employé et la valeur de τ (*voir* Chap. IV).

85. Calcul pratique de la correction. — La grande difficulté pratique du problème réside dans la détermination de τ. De nombreux physiciens s'en sont occupés et ont proposé diverses formules empiriques permettant de calculer la valeur de cette quantité avec une approximation plus ou moins grande.

Regnault (1) plaçait, dans le voisinage du milieu de la colonne non exposée à la température du bain, un petit thermomètre et substituait à τ la température τ' indiquée par ce dernier.

M. Mousson (2) modifia ce mode de calcul en retranchant de la longueur de la colonne une quantité constante, afin de tenir compte du fait qu'une partie du cube capillaire se trouve à une température voisine de celle du bain.

M. Wüllner (3) arriva peu après à une formule semblable, aux coefficients de laquelle il chercha à donner une signification théorique.

---

(1) REGNAULT, *Relation des expériences*, t. I, p. 225; 1847.

(2) A. MOUSSON, *Dilatation eines am Ende erwärmten Stabes* (*Pogg. Ann.*, t. CXXXIII, p. 311; 1868).

(3) A. WÜLLNER, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, t. III, p. 310; 1875. Cette formule a été publiée pour la première fois par M. Landolt en 1868.

Partant des formules connues pour la conductibilité dans un barreau infini, il arrive à l'expression simplifiée

$$C = \alpha(t - t_0)\left(n - \frac{\nu}{a}\right),$$

dans laquelle ν est le nombre de degrés par unité de longueur, et $a = \sqrt{\frac{hp}{kq}}$, h et k étant les coefficients de conductibilité extérieure et intérieure, p et q le périmètre et la section de la tige du thermomètre; t_0 est la température à l'extrémité de la colonne, supposée égale à celle de l'air ambiant.

Pour déterminer a, Wüllner étudia la répartition de la température dans un tube mince de 60^{cm} de longueur et de $1^{cm},5$ de diamètre rempli de mercure; il trouva

$$a = 0,675\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

p et q étant exprimés en millimètres.

On peut objecter à cette manière de procéder que, dans le cas des expériences précédentes, les phénomènes sont totalement différents de ceux qui se passent dans les thermomètres à tige, et sont encore très éloignés du cas des thermomètres de forme allemande. En effet, dans les expériences de M. Wüllner, la conductibilité du mercure jouait un rôle prépondérant, tandis que, dans les thermomètres à tige, elle n'a plus aucune influence appréciable.

Quelques auteurs ont modifié la formule théorique pour la faire concorder avec l'expérience, en remplaçant α par un coefficient plus petit.

Ainsi M. Holzmann [1] introduit dans la formule

$$C = \alpha n(t - \tau')$$

la valeur

$$\alpha = 0,000\,135.$$

M. Thorpe [2] adopte

$$\alpha = 0,000\,143.$$

---

[1] HOLZMANN, *Liebig's Handwörterbuch der Chemie*, t. VII, p. 368.

[2] THORPE, *Journ. of the chem. Soc.*, t. XXXVII, p. 160; 1880.

Enfin M. Mills [1] représente les résultats d'expériences sur des thermomètres à tige par la formule empirique

$$C = (0{,}000133 + 0{,}000000212x)(t - \tau')x,$$

qui convient très bien à un certain nombre de thermomètres examinés par lui, mais ne donne pas la correction exacte pour tous les thermomètres.

M. Thiesen [2] a consacré à la question de longues recherches faites sur des thermomètres de forme allemande. Il plaçait, à côté des thermomètres en expérience, un tube de même forme, contenant plusieurs petits thermomètres. La formule de correction qu'il propose est la formule théorique dans laquelle t' est une fonction exponentielle de x. Cette formule fait concorder très bien des expériences faites avec des thermomètres émergeant de quantités différentes.

Au cours de ses expériences, M. Thiesen constata que, dans la détermination de l'intervalle fondamental des thermomètres de forme allemande, l'effet de la température extérieure est sensible, dans l'enveloppe, à une certaine distance à l'intérieur de l'appareil à ébullition.

Si l'on met à part les expériences de M. Thiesen, dans lesquelles l'auteur a cherché à déterminer la vraie valeur de τ, il reste, pour calculer la correction cherchée, un certain nombre de formules empiriques dans lesquelles $(t - \tau)$ est remplacé par la valeur généralement plus grande $(t - \tau')$. Dans ces formules, les autres facteurs sont corrigés de manière à compenser l'erreur commise. Ces formules sont de trois types différents. En désignant par ε, ζ, η de petites quantités, nous aurons le résumé suivant :

Formules de Mousson et de Wüllner [3].	$C = \alpha(x - \varepsilon)(t - \tau')$,
» de Holtzmann et de Thorpe...	$C = (\alpha - \zeta)x(t - \tau')$,
» de Mills.....	$C = (\alpha - \zeta + \eta x)x(t - \tau')$.

---

(1) E.-J. Mills, *Researches on thermometry* (*Trans. roy. Soc. of Edinburgh*, t. XXIX, p. 567; 1880). Discuté et corrigé par MM. Thorpe et Rücker, (*Remarks on Dr Mill's researches on thermometry; Phil. Mag.*, 5e série, t. XII, p. 1 et 184; 1881).

(2) Thiesen, *loc. cit.*, p. 24.

(3) Dans la formule de Wüllner, τ' est remplacé par t_0; cette formule rentre néanmoins dans le premier type.

D'après ce qui vient d'être dit, on peut conclure qu'il n'existe jusqu'ici aucune formule simple convenant à tous les cas. Lorsqu'il est nécessaire d'appliquer à une lecture thermométrique la correction dont nous nous occupons, on peut, soit déterminer par des expériences préliminaires, pour un thermomètre analogue à celui dont on se sert, la valeur des coefficients à introduire dans une des formules précédentes, soit disposer les expériences d'une manière suffisamment définie pour qu'il soit possible de déterminer τ et d'employer la formule théorique.

Il est souvent possible de plonger dans le bain, à côté des thermomètres, des tiges de verre de mêmes dimensions auxquelles on fixe, par du papier d'étain, de petits thermomètres destinés à mesurer leur température à différentes hauteurs.

Dans de nombreuses expériences de calorimétrie, l'élévation totale de la température se produit en quelques minutes et ne dépasse pas 2 à 3 degrés; on peut alors admettre, sans erreur appréciable, que la tige est restée à la température ambiante.

Lorsque cette correction est forte, on ne peut généralement pas la déterminer avec une approximation suffisante pour les mesures précises. Le thermomètre à mercure perd alors ses principaux avantages et peut être remplacé par d'autres appareils, parmi lesquels ceux qui sont basés sur la variation de la résistance électrique des métaux tiennent le premier rang.

CHAPITRE IV.

SUR L'ÉCHELLE DU THERMOMÈTRE A MERCURE.

THÉORIE.

86. Définition d'une échelle thermométrique arbitraire. — Supposons que nous possédions une échelle normale des températures, à laquelle nous convenions de rapporter tous les phénomènes thermiques, et considérons une propriété d'un corps qui soit liée à cette échelle par une fonction continue et bien définie. Cette propriété peut servir à établir une échelle pratique des températures. Une échelle thermométrique définie de cette manière est doublement arbitraire, puisqu'elle dépend du corps choisi et de la propriété utilisée pour sa définition.

Soit T une température exprimée dans l'échelle normale que nous définirons dans la suite, et posons

$$E_T = f(T), \tag{1}$$

E_T représentant l'état à T° du corps thermométrique, c'est-à-dire la valeur numérique, rapportée à une certaine unité, de la propriété qui sert à définir la température (volume, résistance électrique, coefficient d'élasticité, indice de réfraction, intensité des radiations, etc.). Convenons de nommer *échelle thermométrique* (3) une fonction linéaire de E_T. Soit t une température exprimée dans cette échelle. Nous aurons

$$t = PE_T + Q. \tag{2}$$

Le point de départ de t et la valeur du degré sont encore arbi-

traires. Si l'on veut que les échelles T et t partent du même zéro, on posera

$$(3) \qquad 0 = PE_0 + Q,$$

d'où

$$(4) \qquad t = P(E_T - E_0).$$

Pour que les températures t et T soient exprimées dans le même *système,* il faut leur donner la même valeur à une seconde température choisie comme point fondamental supérieur.

Dans le système centigrade, on aura

$$(5) \qquad 100 = P(E_{100} - E_0),$$

d'où

$$(6) \qquad t = 100\,\frac{E_T - E_0}{E_{100} - E_0}.$$

Pour rendre la discussion plus claire, nous abandonnerons les formules générales, et nous partirons de l'équation (6). La température t définie par cette dernière, quoique arbitraire, est souvent très voisine de T; on peut alors considérer la différence $T - t$ comme un terme correctif de t. Nous allons en donner l'expression.

Développons $f(T)$ en série et posons

$$(7) \qquad E_T = E_0(1 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3 + \delta T^4 + \ldots),$$

d'où

$$(8) \qquad t = 100\,\frac{\alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3 + \delta T^4 + \ldots}{100\alpha + 100^2\beta + 100^3\gamma + 100^4\delta + \ldots}.$$

Retranchant T de part et d'autre, on trouve, après quelques transformations,

$$(9) \qquad T - t = T\,\frac{\beta(100 - T) + \gamma(100^2 - T^2) + \delta(100^3 - T^3) + \ldots}{\alpha + 100\beta + 100^2\gamma + 100^4\delta + \ldots}$$

et enfin

$$(10) \qquad T - t = T(100 - T)(A + BT + CT^2 + \ldots),$$

en posant

$$(11)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\beta + 100\gamma + 100^2\delta}{S}, \\ B = \dfrac{\gamma + 100\delta + \ldots}{S}, \\ C = \dfrac{\delta + \ldots}{S}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S = \alpha + 100\beta + 100^2\gamma + 100^3\delta + \ldots = \dfrac{E_{100} - E_0}{100\,E_0}. \end{cases}$$

Le second membre de l'équation (10) représente la correction qu'il faut appliquer à t pour que la température soit exprimée dans l'échelle normale.

La formule (10) donne la relation générale qui existe entre une échelle thermométrique arbitraire du système centigrade et l'échelle normale dans le même système. La relation entre deux échelles arbitraires est de même forme; le terme correctif est nommé, dans ce cas, *différence de marche* entre les deux échelles.

Les constantes A, B, C, ... peuvent être calculées dès que l'on connaît la valeur des coefficients α, β, γ, δ, ...

Réciproquement, si l'on détermine A, B, C, ..., en mesurant un nombre suffisant de valeurs de $T - t$, et si, de plus, on connaît pour un T quelconque la valeur de $\frac{E_T - E_0}{E_0}$, on pourra calculer α, β, γ, δ, ...

Arrêtons-nous au terme en T^4 dans le développement de $f(T)$ et supposons que nous ayons déterminé l'intervalle fondamental de $f(T)$; nous connaîtrons la valeur de S et nous en tirerons

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{E_{100} - E_0}{E_0}\left(\dfrac{1}{100} - A\right), \\ \beta = \dfrac{E_{100} - E_0}{E_0}\left(\dfrac{A}{100} - B\right), \\ \gamma = \dfrac{E_{100} - E_0}{E_0}\left(\dfrac{B}{100} - C\right), \\ \delta = \dfrac{E_{100} - E_0}{E_0}\,\dfrac{C}{100}. \end{cases}$$

On voit que, dans les équations (11), le coefficient α ne se

trouve pas au numérateur des valeurs de A, B, C, ...; si donc β, γ, δ, ... sont nuls, $t = T$. Le terme correctif est d'autant plus petit que E_T se rapproche davantage d'une fonction linéaire.

Un grand nombre de variations thermiques étant sensiblement proportionnelles à la température, on peut, dans certaines applications, substituer diverses échelles arbitraires à l'échelle normale et négliger la correction; mais, dans les expériences précises, il est nécessaire de corriger les températures données dans une échelle arbitraire.

87. Diverses échelles d'un thermomètre à mercure. — La définition des températures par le thermomètre à mercure résulte de l'équation (6), dans laquelle le phénomène thermique utilisé est la dilatation apparente du mercure dans le verre. Mais cette définition n'est pas suffisante; en effet, la dilatation du verre est un phénomène mal défini, qui dépend de la manière dont le verre est chauffé ou refroidi; chaque thermomètre possède donc un nombre infini d'échelles comprises entre deux limites plus ou moins éloignées, suivant les lois auxquelles sont soumis les résidus de dilatation.

Il suffirait, théoriquement, de définir exactement le traitement que doivent subir les thermomètres pour que leurs indications forment une échelle continue (70); dans la pratique, il faut, de plus, que ce traitement puisse toujours être suivi par un mode opératoire *facilement réalisable*.

On voit, de prime abord, que les deux seuls procédés admissibles sont les procédés extrêmes; nous avons montré, dans le Chapitre précédent (72), que le plus pratique consiste à opérer avec le maximum de résidus.

Relation entre les échelles extrêmes. — Cherchons la relation qui existe entre les deux échelles extrêmes d'un thermomètre à mercure.

Supposons d'abord que les températures soient calculées au moyen d'un zéro constant z_0; en désignant par t la température correspondant à cette définition, par l_t la lecture du thermomètre, nous aurons

$$t = 100 \frac{l_t - z_0}{l_{100} - z_0}. \tag{1}$$

Supposons, au contraire, que le zéro soit déterminé après chaque température; soit z_t sa position variable; la température t' correspondante résultera de la relation

$$(2) \qquad t' = 100 \frac{l_t - z_t}{l_{100} - z_{100}}.$$

La fonction z_t, variant très peu avec t, peut être définie indifféremment dans les échelles t ou t'. Posons

$$(3) \qquad z_t = z_0 - (at + bt^2 + ct^3 + \ldots).$$

En substituant dans l'équation (2), on trouve

$$(4) \qquad t' = 100 \frac{l_t - z_0 + at + bt^2 + ct^3 + \ldots}{l_{100} - z_0 + 100a + 100^2 b + 100^3 c + \ldots}.$$

Par un choix convenable des unités, on peut écrire

$$(5) \qquad l_t - z_0 = t \text{ degrés.}$$

Il en résulte

$$(6) \qquad t - t' = t(100 - t) \frac{b + (100 + t)c + \ldots}{1 + a + 100b + 100^2 c + \ldots}.$$

D'après cette équation, la différence entre les échelles t' et t s'annule à 0° et à 100°, ce que nous savions; mais nous voyons de plus que cette différence est représentée par une fonction de t du même degré que z_t.

Nous avons vu (68) que, dans le développement de la fonction z_t, on peut s'arrêter au terme en t^2; la relation pratique entre t et t' est donc

$$(6') \qquad t - t' = \frac{bt(100 - t)}{1 + a + 100b}.$$

La différence $t - t'$ dépend presque uniquement de b et s'annule avec ce coefficient; elle est donc sensiblement nulle pour le verre dur, et les deux échelles sont presque identiques. Ce résultat pouvait être prévu; car, si la position du zéro varie proportionnellement à la température, la différence entre les corrections d'intervalle fondamental déterminées par chacun des deux procédés compense la différence des zéros admis.

Pour les thermomètres en cristal dur, la différence est de 0,082 degré à 50°; d'après le signe de cette différence, on voit que, entre 0° et 100°, les températures calculées sont plus élevées dans la supposition d'un zéro constant que pour un zéro variable; en d'autres termes, $t > t'$.

Enfin, si l'on suppose exacte la loi du carré pour le verre d'Iéna XVII^{III} (71), on a

$$(t - t')_{max} = + 0,265 \text{ degré}.$$

88. Théorie élémentaire du thermomètre à mercure. — Nous appliquerons maintenant les formules développées précédemment à la théorie du thermomètre à mercure.

Remarquons d'abord que, dans les procédés les plus précis au moyen desquels on détermine la dilatation des corps solides (1), il est pour ainsi dire impossible de produire une variation considérable de la température en un temps très court; on ne peut donc pas ramener rapidement à 0° le corps dont la longueur vient d'être mesurée à une température qui en diffère beaucoup. On en conclut que la dilatation du verre ne peut pas être mesurée avec ses résidus. Pour opérer dans des circonstances bien définies, on choisira par conséquent l'autre extrême, et l'on disposera les expériences de manière que, au moment de chaque mesure, les résidus de dilatation aient à peu près disparu (2). Dans ce but, la température ne devra être abaissée que très lentement.

Les dilatations mesurées de cette manière correspondent à la mesure des températures dans la supposition d'un zéro constant. En partant des formules de dilatation, c'est donc, dans la notation précédente, l'échelle t que nous calculerons; l'échelle t' s'en déduira par la relation (6') du n° 87. Nous donnerons, dans la suite, une nouvelle expression de cette relation.

---

(1) Méthodes du comparateur et du dilatomètre Fizeau (*voir* Chap. VI).

(2) On peut effectuer une mesure avant que les résidus aient complètement disparu, à la condition de les déterminer par la position du zéro d'un thermomètre de même verre que l'échantillon étudié, et soumis pendant toutes les expériences aux mêmes influences. Mais la correction mesurée par ce procédé ne peut être connue avec une exactitude suffisante qu'à la condition d'être très petite, car, si les résidus sont encore considérables, ils peuvent varier sensiblement durant la mesure.

Soient V_T le volume, à T°, d'un vase de verre ayant à 0° le volume V_0 ; V'_T le volume du mercure qui le remplit à 0°. Posons

$$(1) \qquad V_T = V_0(1 + m\,T + n\,T^2 + p\,T^3 + q\,T^4 + \ldots),$$

$$(2) \qquad V'_T = V_0(1 + m'T + n'T^2 + p'T^3 + q'T^4 + \ldots).$$

Nous nous proposons de calculer la valeur du terme correctif de T dans l'équation (10) du n° 86. Pour cela, nous aurons à introduire, dans les formules, la quantité $V'_T - V_T$ au lieu de E_T.

Pour voir clairement la signification de cette correction dans le cas du thermomètre à mercure, nous la décomposerons en deux parties : l'une se rapporte au réservoir et au mercure qu'il contient, et provient de ce que $V'_T - V_T$ n'est pas une fonction linéaire de T ; elle dépend essentiellement des coefficients des puissances de T supérieures à la première dans (1) et (2). L'autre est relative à la tige et ne dépend que de (1); cette correction est due à ce que la capacité du tube qui sert à mesurer l'excès du volume du mercure sur celui du réservoir varie avec la température.

Correction relative au réservoir. — Pour calculer cette correction, il suffit d'introduire, dans les équations (11) du n° 86, les différences $m' - m$, $n' - n$, ... au lieu de α, β, ... Nous aurons ainsi

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \frac{n' - n + 100(p' - p) + 100^2(q' - q) + \ldots}{S_1}, \\ B_1 &= \frac{(p' - p) + 100(q' - q) + \ldots}{S_1}, \\ C_1 &= \frac{(q' - q) + \ldots}{S_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_1 &= m' - m + 100(n' - n) + 100^2(p' - p) + 100^3(q' - q) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(4) \qquad \varphi = T(100 - T)(A_1 + B_1 T + C_1 T^2 + \ldots);$$

φ est la correction cherchée.

Correction relative à la tige. — Dans la détermination de l'intervalle fondamental, le tube capillaire est à la température de 100°; à toute autre température, une fraction quelconque du

tube (supposé cylindrique) possède un volume différent de celui qui est donné par le rapport de sa longueur à celle du degré. Par conséquent, la lecture doit être corrigée d'une quantité correspondant à la variation du volume du tube. Cette quantité est connue sous le nom de *correction de Poggendorff*.

Soit v_0 le volume du tube entre 0° et 100° à la température de 0°; à T°, il devient

$$(1') \qquad v_T = v_0(1 + mT + nT^2 + pT^3 + qT^4 + \ldots),$$

et le volume occupé par le mercure, abstraction faite de la correction précédente, aura la valeur $\frac{T}{100} v_{100}$. Or, en fonction de v_T, l'expression de ce volume est $\frac{T+\psi}{100} v_T$, $-\psi$ étant la correction cherchée (négative entre 0° et 100°).

On a donc

$$(5) \qquad \frac{T}{100} v_{100} = \frac{T+\psi}{100} v_T,$$

d'où l'on tire la valeur de la correction en degrés :

$$(6) \qquad -\psi = -T\frac{v_{100} - v_T}{v_T}.$$

Nous aurions l'expression exacte de cette correction, en introduisant dans cette équation la valeur de v_T donnée par (1'). Or ψ est nul à 0° et à 100°; il est maximum dans le voisinage de 50°; à cette température, v_T surpasse v_0 de un à deux millièmes; ψ étant toujours très petit, on peut remplacer, avec une approximation suffisante, dans tout l'intervalle [0·100], v_T par

$$(7) \qquad v_{50} = v_0(1 + 50m + \ldots) = v_0(1 + \lambda).$$

Donc

$$(8) \quad \psi = T(100 - T)\frac{m + n(100 + T) + p(100^2 + 100T + T^2) + \ldots}{1 + \lambda}.$$

Posons

$$(9) \qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{m + 100n + 100^2 p + 100^3 q}{1+\lambda}, \\ B_2 = \dfrac{n + 100p + 100^2 q + \ldots}{1+\lambda}, \\ C_2 = \dfrac{p + 100q + \ldots}{1+\lambda}; \end{cases}$$

nous aurons

$$(10) \qquad \psi = T(100 - T)(A_2 + B_2 T + C_2 T^2 + \ldots).$$

Correction totale. — La correction totale qu'il faut appliquer aux lectures d'un thermomètre à mercure à zéro constant pour les réduire à l'échelle normale est

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} T - t = \varphi - \psi &= T(100 - T)[A_1 - A_2 + (B_1 - B_2)T + (C_1 - C_2)T^2 + \ldots] \\ &= T(100 - T)[A + BT + CT^2 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Cette correction est ainsi exprimée en fonction des constantes de la dilatation du mercure et du verre.

On voit, d'après les équations (3), que les facteurs A_1, B_1, C_1, ... dépendent tous de différences et de rapports entre des quantités très petites, nécessairement assez mal connues. Les constantes correspondantes du second groupe au contraire, dont les valeurs sont données par les équations (9), peuvent être déterminées avec une précision incomparablement supérieure.

On peut calculer une valeur très approchée du coefficient A_2, et, dans l'état actuel des mesures, il n'est pas illusoire de calculer B_2; on peut donc déterminer *a priori* la correction relative à la tige. Quant à la correction φ, il n'est pas encore possible de calculer sa valeur, même grossièrement approchée, à l'aide des équations (3). Le seul parti que l'on puisse tirer de l'équation (11) consiste à déterminer les valeurs de A_1, B_1, C_1, ... au moyen des quantités A, B, C, ..., trouvées à l'aide de diverses valeurs de $T - t$, et des quantités A_2, B_2, C_2, ..., calculées comme on vient de le voir. $T - t$ peut être déterminé par des expériences directes. Nous y reviendrons bientôt (93).

Différence de marche entre deux thermomètres à mercure. — Nous avons supposé jusqu'ici que les corrections calculées se rapportaient à l'échelle normale. Les équations précédentes conviennent encore au calcul de la différence de marche entre deux thermomètres à mercure. L'équation (11) conserve la même forme, mais les expressions qui donnent les valeurs des constantes sont différentes; on les obtient en soustrayant les équations homologues des systèmes (3) et (9) relatifs aux deux espèces de verre.

Dans ce cas encore, l'équation (11) servira à calculer A_1, B_1, C_1, ..., connaissant A, B, C, ... et A_2, B_2, C_2, ...

89. Rôle des résidus de dilatation. — Nous modifierons maintenant les formules précédentes, de manière à tenir compte des résidus de dilatation.

Soient G_T le coefficient moyen de la dilatation du verre entre 0° et T°, tel que nous l'avons considéré jusqu'ici; Γ_T le coefficient modifié par les résidus.

D'après les définitions données précédemment,

$$(1) \qquad G_T = \frac{V_T - V_0}{V_0 T}.$$

Si l'on veut tenir compte des résidus, il faut remplacer, dans cette équation, la constante V_0 par une quantité variable avec T, qui augmente en même temps que la température s'élève. Remarquons toutefois que la correction de V_0 au dénominateur ne modifiera G_T que d'une quantité insignifiante (¹). En conservant, pour simplifier, V_0 au dénominateur, on a

$$(2) \qquad \Gamma_T = \frac{V_T - V_0(1 + \mu T + \nu T^2 + \varpi T^3 + \rho T^4 + \ldots)}{V_0 T}.$$

Il est aisé de voir que les coefficients μ, ν, ϖ, ρ, ... ne sont autre chose que les coefficients a, b, c, d, ... de la fonction qui représente la dépression du zéro (68) divisés par le nombre de degrés que contient le réservoir; en effet, la fonction établie précédemment donnait la dépression en degrés, tandis que la dilatation calculée ici se rapporte au volume du réservoir. Nous calculerons plus loin (93) le facteur de réduction.

Les équations (1) et (2) donnent

$$(3) \qquad \Gamma_T = G_T - \mu - \nu T - \varpi T^2 - \rho T^3 - \ldots.$$

La correction relative au réservoir était donnée par la relation [*voir* l'équation (6) du n° 86]

$$(4) \qquad \varphi = T - 100 \frac{V'_T - V_T}{V'_{100} - V_{100}}.$$

(¹) Pour le verre dur et pour T = 100, par exemple, V_0 devrait être modifié d'environ $\frac{1}{60000}$ de sa valeur; l'erreur ne dépasse pas $\frac{1}{50}$ des limites de la précision avec laquelle il est actuellement possible de déterminer Γ.

Cette correction est maintenant

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi' = T - 100\,\dfrac{V'_T - V_0[1 + (G_T - \mu - \nu T - \varpi T^2 - \rho T^3 - \ldots)T]}{V'_{100} - V_0[1 + (G_{100} - \mu - 100\nu - 100^2\varpi - 100^3\rho - \ldots)100]} \\ \quad = T - 100\,\dfrac{V'_T - V_T + V_0(\mu + \nu T + \varpi T^2 + \rho T^3 + \ldots)T}{V'_{100} - V_{100} + V_0(\mu + 100\nu + 100^2\varpi + 100^3\rho + \ldots)100}. \end{cases}$$

Dans le terme correctif du numérateur, nous pouvons remplacer T par $100\,\dfrac{V'_T - V_T}{V'_{100} - V_{100}}$. Multiplions les deux termes de la fraction par $V'_{100} - V_{100}$ et posons

$$\frac{V'_{100} - V_{100}}{100\,V_0} = \Delta.$$

Δ est le coefficient de la dilatation apparente du mercure dans le verre entre 0° et 100°. Après quelques réductions, il vient

$$(6)\quad \varphi' = T - 100\,\frac{V'_T - V_T}{V'_{100} - V_{100}}\;\frac{\Delta + \mu + \nu T + \varpi T^2 + \rho T^3 + \ldots}{\Delta + \mu + 100\nu + 100^2\varpi + 100^3\rho + \ldots}.$$

Enfin, en ajoutant et retranchant $100\,\dfrac{V'_T - V_T}{V'_{100} - V_{100}}$, on trouve

$$(7)\quad \varphi' = T - 100\,\frac{V'_T - V_T}{V'_{100} - V_{100}}\left[1 - (100 - T)\,\frac{\nu + \varpi(100 + T) + \rho(100^2 + 100T + T^2) + \ldots}{\Delta + \mu + 100\nu + 100^2\varpi + 100^3\rho + \ldots}\right].$$

On tire des équations (4) et (7)

$$(8)\quad \varphi - \varphi' = -100\,\frac{V'_T - V_T}{V'_{100} - V_{100}}\,(100 - T)\,\frac{\nu + \varpi(100 + T) + \rho(100^2 + 100T + T^2) + \ldots}{\Delta + \mu + 100\nu + 100^2\varpi + 100^3\rho + \ldots}$$

et, avec une approximation suffisante,

$$(9)\quad \varphi - \varphi' = -T(100 - T)\,\frac{\nu + \varpi(100 + T) + \rho(100^2 + 100T + T^2) + \ldots}{\Delta + \mu + 100\nu + 100^2\varpi + 100^3\rho + \ldots},$$

expression équivalente à l'équation (6) du n° 87. Cette dernière équation a l'avantage de montrer mieux la signification physique des grandeurs qui entrent dans le terme correctif.

Posons

$$(10)\quad \begin{cases} A''_1 = \dfrac{\nu + 100\varpi + 100^2\rho + \ldots}{S'}, \\ B''_1 = \dfrac{\varpi + 100\rho + \ldots}{S'}, \\ C''_1 = \dfrac{\rho + \ldots}{S'}; \\ S' = \Delta + \mu + 100\nu + 100^2\varpi + 100^3\rho \end{cases}$$

et

$$(11)\qquad \begin{cases} A'_1 = A_1 + A''_1, \\ B'_1 = B_1 + B''_1, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

L'équation (9) deviendra

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi' = \varphi + T(100 - T)(A''_1 + B''_1 T + C''_1 T^2 + \dots) \\ \quad = T(100 - T)(A'_1 + B'_1 T + C'_1 T^2 + \dots). \end{cases}$$

Il nous resterait à calculer les modifications apportées à la correction ψ par les résidus de dilatation. Nous nous contenterons de la discussion physique des phénomènes.

Remarquons d'abord qu'il n'y a aucun moyen de déterminer l'état actuel de la tige d'un thermomètre comme on mesure le volume du réservoir par la détermination du zéro. On ne peut donc pas calculer ou éliminer ses variations à une même température. Il faut par conséquent chercher à établir, à toute température, un état semblable dans les limites de la précision que l'on veut obtenir. Ceci revient à dire que l'on assimile la tige au réservoir d'un thermomètre dont le zéro serait considéré comme constant. La valeur de ψ, calculée précédemment, correspond donc à l'usage habituel des thermomètres. Mais, tandis qu'il était très difficile de remplir, pour le réservoir, les conditions théoriques supposées, il est facile de les satisfaire pour la tige dans les limites de la précision requise, puisque le volume d'un degré est inférieur à $\frac{1}{6000}$ de celui du réservoir.

Supposons, par exemple, un thermomètre en cristal dur français exposé à la température de 100°. Dans les premiers instants, on ne peut faire aucune mesure, parce que la variation du zéro est trop rapide; or l'abaissement qui se produit encore après la cinquième minute d'exposition à 100° est d'environ 0,07 degré. La dilatation du tube pendant le même intervalle est de 0,001 degré. Cette erreur est de beaucoup inférieure à celle qui peut résulter du mouvement du zéro à l'instant supposé. Aux températures plus basses, les dépressions sont moins rapides, mais, en revanche, elles sont moins fortes, et la colonne sur laquelle la variation du tube agit est plus courte.

Pour le verre dur, les circonstances sont naturellement beaucoup plus favorables. La variation qui se produit encore après

une minute d'échauffement à 100° ne dépasse pas 0,0001 degré. Lorsque la température s'abaisse à partir de 100°, l'erreur maxima se produit à 50°; elle est, au premier instant, de 0,0004 degré.

Nous conserverons donc la correction ψ, et, réunissant les équations (10) du n° 88 et (12) ci-dessus, nous aurons la formule de correction d'un thermomètre à mercure à zéro variable

$$(13)\quad T - t' = \varphi' - \psi = T(100 - T)[A'_1 - A_2 + (B'_1 - B_2)T + (C'_1 - C_2)T^2 + \ldots].$$

A'_1, B'_1, C'_1, ... sont les coefficients de la correction relative au réservoir dans la supposition d'un zéro variable; ils se composent des coefficients A_1, B_1, C_1, ..., calculés en supposant un zéro constant, et des quantités A''_1, B''_1, C''_1, ... se rapportant à la correction additionnelle due à la variation du zéro; enfin A_2, B_2, C_2, ... sont relatifs à la tige.

EXPÉRIENCES.

90. Discussion préliminaire. — Ainsi que nous l'avons fait remarquer précédemment (88), il est impossible de calculer, même avec une grossière approximation, la valeur de la correction φ ou φ' en partant des meilleures données actuelles sur la dilatation du verre; on ne peut donc pas calculer la différence de marche entre divers thermomètres à mercure. Le seul procédé précis au moyen duquel cette divergence puisse être déterminée consiste à étudier parfaitement plusieurs thermomètres étalons faits avec des verres de composition connue, et à les comparer ensuite entre eux à diverses températures (57).

Si les thermomètres sont de verres différents, on détermine ainsi les lois de leurs divergences systématiques; s'ils sont de même verre, on fixe les limites de leurs écarts fortuits.

Théoriquement, il paraît certain que, si les enveloppes de deux thermomètres possèdent exactement la même composition chimique et si, de plus, elles ont été soumises aux mêmes influences, ces thermomètres ne doivent montrer aucune divergence systématique. Mais, dans la pratique, il faut faire quelques restrictions.

Le verre est un corps compliqué dont la composition varie légèrement d'un échantillon à l'autre, même dans une seule potée.

Il paraît démontré, en outre, que le mode de traitement influe sur sa dilatation. Or, comme l'échelle d'un thermomètre dépend de quantités de second ordre dans la formule de dilatation, il n'est pas certain *a priori* que divers thermomètres, dont l'identité n'est garantie que par les procédés de fabrication, concordent dans les limites de la précision de leur étude.

Il est de la plus haute importance, pour la Thermométrie, de fixer les limites de la divergence des thermomètres dits *du même verre,* mais construits, en réalité, avec des matières qui diffèrent inévitablement. En effet, il serait pratiquement impossible de comparer tous les thermomètres à un étalon unique, afin de connaître les lois de leurs divergences par rapport à l'échelle normale; on ne peut donc compter sur l'identité des échelles de deux thermomètres, qui n'ont pas été comparés, que dans les limites de divergence trouvées par la comparaison d'un grand nombre de thermomètres du même verre. C'est aussi dans ces limites seulement que l'on peut effectuer l'unification pratique de l'échelle thermométrique.

Comme, en outre, on emploie pour la construction des thermomètres plusieurs espèces de verre, il est très important aussi de déterminer les constantes de la formule de réduction pour tous les verres d'un usage fréquent.

Divergences fortuites et divergences systématiques. — Supposons d'abord que, par l'inspection des résultats fournis par la comparaison de plusieurs thermomètres, on ne découvre pas de divergences suivant une marche bien déterminée; il n'y aura pas lieu, dans ce cas, de chercher à réunir les résultats des comparaisons dans une équation analogue à celles dont nous avons donné précédemment la forme théorique.

Considérons un groupe de n thermomètres.

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les écarts de chacun d'eux par rapport à la moyenne de toutes les indications à une même température. Posons

$$e = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} e_i,$$

les quantités e_i étant prises toutes avec le signe positif; nous nommerons e l'écart moyen par rapport à la moyenne.

D'après la théorie des probabilités, cette quantité est à l'écart moyen que l'on obtiendrait avec un nombre infini de thermomètres comme $\sqrt{n-1} : \sqrt{n}$. L'écart probable, par rapport à la moyenne d'un nombre infini de thermomètres, serait donc

$$e' = 0,674\, e \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Nous nommerons e' l'*erreur probable d'un thermomètre*.

Voici les valeurs de $\frac{e'}{e}$ pour diverses valeurs de n :

n.	$\frac{e'}{e}$.
2	0,950
3	0,822
4	0,775
5	0,754
6	0,738
7	0,728
8	0,721
9	0,715
10	0,710

Supposons, en second lieu, que les divergences entre divers thermomètres présentent une marche systématique. Cette marche sera représentée par l'équation (13) du n° 89; on utilisera donc les divergences trouvées expérimentalement pour diverses valeurs de la température, en établissant des équations de condition dans lesquelles les paramètres du second membre deviendront les inconnues. On calculera la valeur de ces dernières en résolvant le système d'équations normales résultant de ces équations de condition. Le nombre de paramètres qu'il convient de conserver dépend de la grandeur et de la répartition des erreurs résiduelles.

Remarque. — Dans le calcul de la formule théorique qui représente la différence de marche entre deux thermomètres, nous avons supposé que ceux-ci concordent à 0° et à 100°. Mais ces conditions ne sont pas nécessairement satisfaites.

Nous avons vu (80) que, par suite des erreurs dues à la capillarité, il peut arriver que le point zéro ne doive pas être considéré comme identique dans deux thermomètres que l'on compare.

L'intervalle fondamental de deux thermomètres peut aussi diverger sensiblement. On tient compte de la première de ces divergences, en ajoutant une quantité constante au second membre de la formule; la seconde conduira à introduire un terme proportionnel à la température. On est ainsi amené à adopter la forme générale d'un développement en série auquel, rigoureusement, on devrait toujours avoir recours.

Cependant, si l'on réunissait les résultats des expériences dans une fonction de ce genre, on pourrait être conduit à des conclusions absolument erronées. En effet, les erreurs fortuites des divergences trouvées se répartiraient sur les deux termes introduits dans la formule pour tenir compte des deux erreurs systématiques en question; ces dernières apparaîtraient beaucoup plus grandes qu'elles ne sont en réalité, tandis que les erreurs résiduelles seraient diminuées sans raison.

L'opportunité d'une modification de la formule théorique est laissée dans ce cas, comme dans beaucoup d'autres, au tact de l'observateur. On ne devra apporter une pareille modification que si l'on a des raisons *a priori* de croire à l'existence de divergences dépassant les erreurs ordinaires des expériences, et si l'on a fait de nombreuses comparaisons dans le voisinage des points 0° et 100°, desquelles il ressorte d'une manière indubitable que la fonction la plus probable qui représente les divergences ne peut pas s'annuler dans ces points.

En général, si l'on a des raisons de croire que les valeurs admises pour l'intervalle fondamental des divers thermomètres comparés ne sont pas équivalentes, il faut, si cela est possible, faire de nouvelles déterminations de cette constante dans des circonstances semblables (73) et ne tenir compte que de ces nouvelles valeurs. Dans ce cas, le terme correctif de la formule théorique n'a plus aucune raison physique et ne pourrait plus servir, comme il arrive souvent, qu'à cacher des erreurs dans les expériences.

91. Comparaisons entre des thermomètres du même verre. — La recherche des divergences systématiques qui peuvent exister entre des thermomètres du même verre n'a pris une grande importance que depuis l'époque où, par un calcul rationnel des

températures et par une étude soignée des thermomètres, les erreurs probables totales de l'étude et des observations ont été réduites au même ordre de grandeur que la différence de marche réelle entre les thermomètres.

Les premières expériences très précises entreprises dans le but de déterminer ces dernières ont été exécutées au cours des recherches qui ont précédé l'adoption d'une échelle thermométrique normale par le Comité international des Poids et Mesures (1).

Une série d'expériences préliminaires fut entreprise en 1884 par M. Guillaume (2). Cinq thermomètres Tonnelot en verre dur et trois thermomètres Alvergniat en cristal furent comparés entre 0° et 35°. L'erreur probable moyenne d'un thermomètre Tonnelot, telle qu'elle vient d'être définie, fut de 0,0015 degré.

Peu après cette époque, la construction, l'étude et les procédés de comparaison des thermomètres furent encore perfectionnés, et diverses séries de comparaisons faites au Bureau international des Poids et Mesures donnèrent des résultats sensiblement meilleurs.

En 1885, M. Chappuis (3) compara, deux à deux, en série fermée, quatre thermomètres en verre dur entre 0° et 78°; l'année suivante, de nouvelles comparaisons entre quatre autres thermomètres de même matière furent faites par le même observateur entre — 10° et + 30°. Enfin M. Guillaume compara, en 1886, deux thermomètres en verre dur et deux en cristal dur entre 0° et 50°. Nous donnerons ici les résultats de ces comparaisons.

Dans chacun des Tableaux suivants, la première colonne contient la température approximative moyenne de la série. Dans les deux premiers, les quatre colonnes suivantes indiquent les écarts de chaque thermomètre par rapport à la moyenne des quatre, et les deux dernières l'écart moyen et l'erreur probable

---

(1) Des expériences de même nature avaient déjà été faites par M. Thiesen en 1877 (voir *Vergleichungen von Quecksilberthermometern*, etc.), et par M. Benoît en 1881 (voir *Mesures de dilatation*, etc.); mais le verre des divers thermomètres employés par ces observateurs était sans doute peu homogène.

(2) Ch.-Ed. Guillaume, *Études thermométriques*. Pour la composition du verre dur et du cristal dur, *voir* (67).

(3) P. Chappuis, *Études sur le thermomètre à gaz*, etc., p. 21.

moyenne d'un thermomètre. Dans les deux derniers Tableaux, l'écart moyen n'est autre chose que la demi-différence des thermomètres de même espèce.

THERMOMÈTRES EN VERRE DUR.

Première série.

Température.	Écarts par rapport à la moyenne. — Thermomètres. N° 4428.	N° 4429.	N° 4430.	N° 4431.	Écart moyen.	Erreur probable.
5° ...	—0°,0011	+0°,0006	+0°,0009	—0°,0004	±0°,0007	±0°,0005
10...	—0,0010	0,0000	+0,0008	+0,0002	0,0005	0,0004
15...	—0,0019	+0,0019	—0,0001	+0,0001	0,0010	0,0008
20...	—0,0015	—0,0005	+0,0004	+0,0016	0,0010	0,0008
25...	—0,0002	—0,0010	+0,0009	+0,0004	0,0006	0,0005
30...	—0,0014	—0,0008	+0,0008	+0,0014	0,0011	0,0009
35...	—0,0001	—0,0028	+0,0020	+0,0009	0,0014	0,0011
40...	+0,0006	—0,0010	—0,0002	+0,0006	0,0007	0,0005
45...	—0,0024	+0,0002	+0,0009	+0,0012	0,0013	0,0010
61...	+0,0016	—0,0026	—0,0024	+0,0034	0,0025	0,0019
78...	—0,0005	—0,0022	+0,0005	+0,0025	0,0014	0,0011
					Moyenne.....	0,0009

Deuxième série.

Température.	Écarts par rapport à la moyenne. — Thermomètres. N° 4479.	N° 4480.	N° 4481.	N° 4482.	Écart moyen.	Erreur probable.
—10° ...	—0°,0015	—0°,0009	+0°,0005	+0°,0019	±0°,0012	±0°,0009
+10...	—0,0008	—0,0005	+0,0011	+0,0001	0,0006	0,0005
20...	+0,0005	+0,0001	—0,0006	0,0000	0,0003	0,0002
30...	—0,0028	+0,0006	+0,0011	+0,0010	0,0014	0,0011
					Moyenne.....	0,0007

Troisième série.

Thermomètres.	Demi-différence des thermomètres nos 4327 et 4330.	Erreur probable.
5°	0°,0005	±0°,0005
10	0,0001	0,0001
12,5	0,0009	0,0009 (1)
15	0,0027	0,0026
17,5	0,0010	0,0010
20	0,0007	0,0007
25	0,0004	0,0004
30	0,0008	0,0008
35	0,0010	0,0010
40	0,0021	0,0020
45	0,0016	0,0015
50	0,0008	0,0008
	Moyenne.....	0,0010

THERMOMÈTRES EN CRISTAL DUR.

Thermomètres.	Demi-différence des thermomètres nos 4450 et 4451.	Erreur probable.
5°	0°,0005	±0°,0005
10	0,0020	0,0019
12,5	0,0004	0,0004
15	0,0007	0,0007
17,5	0,0001	0,0001
20	0,0024	0,0023
25	0,0003	0,0003
30	0,0020	0,0019
35	0,0002	0,0002
40	0,0004	0,0004
45	0,0001	0,0001
50	0,0012	0,0011
	Moyenne.....	0,0008

(1) Les expériences à 12°,5 et 17°,5 ont été faites hors du plan prévu, afin d'examiner la marche des thermomètres dans le voisinage de 15°, où ils montraient une divergence assez forte. Cette divergence était produite par un léger dépôt blanchâtre qui se trouvait dans le tube du thermomètre n° 4327. En laissant de côté l'observation à 15°, l'erreur probable moyenne devient 0,0008 degré.

Les erreurs probables ci-dessus sont formées par l'addition, d'après la loi connue, de trois espèces d'erreurs : 1° sommes des erreurs de l'étude de chaque thermomètre; 2° erreurs des comparaisons; 3° divergences réelles entre les thermomètres provenant de légères différences dans la dilatation de leurs enveloppes.

Dans toutes les séries de comparaisons faites dans de bonnes conditions, l'erreur probable moyenne d'un thermomètre ne dépasse pas un millième de degré. Il est difficile d'estimer exactement les erreurs des expériences; mais, en tenant compte de toutes les erreurs qui affectent l'étude et la comparaison des thermomètres, on ne peut guère espérer descendre au-dessous de cette quantité.

Nous en concluons que *la différence de marche entre des thermomètres de même matière soumis au même traitement est inférieure aux erreurs des meilleures observations.*

92. Comparaisons entre des thermomètres de verres différents. — De nombreuses expériences ont été faites pour déterminer la différence de marche entre des thermomètres faits avec des verres n'ayant pas la même composition.

Les recherches faites dans ce but par Regnault (1), au-dessus de 100°, et par Isidore Pierre (2), entre 0° et 100°, sont restées pendant longtemps les plus précises et les plus complètes que l'on possédât; mais les résultats de ces excellents observateurs sont rendus incertains par le peu de connaissance que l'on avait alors des mouvements du zéro. Les résultats d'expériences plus récentes de M. Rowland (3) sont devenus inutiles pour la même cause.

Un autre groupe de recherches qui pouvaient avoir un grand

---

(1) REGNAULT, *Relation des expériences;* Quatrième Mémoire : *De la mesure des températures.*

(2) ISIDORE PIERRE, *Études sur la marche comparative des thermomètres à mercure faits avec des verres différents* (*Annales de Chimie et de Physique,* 1842). Isidore Pierre avait eu l'idée d'adapter successivement à la même tige des réservoirs de différents verres; les divergences trouvées par lui sont donc dues entièrement à la correction relative au réservoir.

(3) H.-A. ROWLAND, *On the mechanical equivalent of heat, etc.* (*Proceedings of the Americ. Acad. of Arts and Sciences;* 1879).

intérêt local perdent une partie de leur importance par le fait qu'elles ont été exécutées avec des thermomètres de composition inconnue. Ce sont les expériences de M. Thiesen, déjà mentionnées, des comparaisons de M. Marek (¹), faites entre 18° et 30°, et un certain nombre d'expériences peu précises faites par divers autres observateurs.

Les premières recherches précises pour lesquelles tous les éléments sont suffisamment connus paraissent être celles de M. Wiebe (²), qui a comparé entre eux divers thermomètres à mercure parmi lesquels s'en trouvait un en verre dur français. Le Tableau suivant contient l'excès des indications de chaque thermomètre sur celles du thermomètre en verre dur :

	Verres d'Iéna.			
Températures.	XIV^{m}.	XVI^{m}.	XVIII^{m}.	Cristal anglais.
0°	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00
10	—0,01	—0,01	—0,03	—0,05
20	+0,01	—0,01	—0,04	—0,06
30	+0,03	+0,02	—0,03	—0,07
40	+0,02	+0,03	—0,03	—0,11
50	0,00			—0,13

Les comparaisons faites par M. Guillaume, entre deux thermomètres en verre dur et deux thermomètres en cristal dur français, ont donné les résultats contenus dans le Tableau suivant, dans lequel les nombres de la seconde colonne représentent l'excès des indications des thermomètres en cristal sur ceux en verre dur :

(¹) W.-J. Marek, *Pesées* (*T. et M.*, t. II, p. D.7; 1883).

(²) H.-F. Wiebe, *Ueber den Einfluss der Zusammensetzung*, etc. (*Sitzungsberichte der königl. preuss. Akad. der Wissenschaften*, 1885; p. 633). Pour la composition des verres d'Iéna, *voir* (71).

Températures.	Cristal — Verre. Obs.	Calc.	Obs.—Calc.
0	0	0	0
0.....	0,0000	0,0000	0,0000
5.....	+0,0072	+0,0066	+0,0006
10.....	+0,0132	+0,0124	+0,0008
12,5.....	+0,0161	+0,0155	+0,0006
15.....	+0,0173	+0,0174	—0,0001
17,5.....	+0,0212	+0,0196	+0,0016
20.....	+0,0210	+0,0216	—0,0006
25.....	+0,0253	+0,0250	+0,0003
30.....	+0,0271	+0,0277	—0,0006
35.....	+0,0273	+0,0296	—0,0023
40.....	+0,0286	+0,0309	—0,0023
45.....	+0,0335	+0,0315	+0,0020
50.....	+0,0328	+0,0314	+0,0014

En appliquant la méthode des moindres carrés aux calculs des constantes d'une formule de la forme donnée précédemment (88 et 89), les divergences ci-dessus conduisent à l'expression

$$t_c - t_v = t(100 - t)(14,126 - 0,0311)\,10^{-6},$$

qui laisse subsister les erreurs résiduelles inscrites en regard des résultats, et montre que $t_c - t_v$ est maximum pour $t = 46,943$; sa valeur est alors égale à 0,0315 degré. On voit, d'après la répartition des erreurs résiduelles, qu'une fonction à deux paramètres suffit pour représenter les divergences dans les limites des erreurs d'observation. Pour une formule à un seul paramètre, la répartition des erreurs résiduelles est insuffisante.

D'autres comparaisons [1], faites de 10 en 10 degrés de 0° à 80°, entre deux thermomètres en verre dur et quatre thermomètres à échelle fractionnée en *cristal ordinaire français*, ont donné, comme différence de marche [2],

$$t_c - t_v = t(100 - t)(16,701 - 0,002t)\,10^{-6}.$$

---

[1] J.-R. Benoît, *Nouvelles études et mesures de dilatation*, etc. (*T.* et *M.*, t. VI, p. 56; 1888).

[2] *Voir* Tables VII et VIII.

Le maximum est de 0,0414 degré à 49°,986. Les erreurs résiduelles de ces comparaisons étaient aussi très faibles.

Le résultat général de ces dernières expériences peut être formulé comme suit : *Les divergences entre les thermomètres de verres différents sont très bien représentées par un cas simple de la formule générale.*

Ce résultat, joint à ceux du n° 91, montre à l'évidence que le thermomètre à mercure, contrairement à une opinion très répandue, se conforme aussi bien qu'on peut le désirer aux conséquences d'une théorie élémentaire.

93. **Conséquences relatives aux dilatations.** — La théorie du thermomètre à mercure ne nous a permis de tirer aucune conclusion suffisamment précise sur la différence de marche des thermomètres. Mais, par un procédé inverse, cette théorie va nous conduire à diverses conséquences de quelque importance concernant la dilatation des corps solides.

La marche du calcul est la suivante :

Partant de l'expression qui représente la dilatation du verre et du mercure, nous pouvons calculer une valeur suffisamment approchée de la correction $-\psi$ relative à la tige. Connaissant en outre la différence de marche entre plusieurs thermomètres, nous en déduirons la valeur de la correction φ' relative au réservoir. D'autre part, la loi de la dépression du zéro permet de ramener les dilatations au cas où l'on opère avec le maximum de résidus. C'est en combinant la valeur vraie de φ' avec celle qui serait donnée par la formule de dilatation que l'on peut corriger cette dernière. Le calcul que nous allons développer nous donnera d'abord des relations numériques entre les coefficients des termes en t^2 dans la dilatation du verre et du cristal; il nous démontrera l'existence pratique d'un terme du troisième degré; enfin nous en déduirons les limites probables entre lesquelles peut varier le coefficient du terme quadratique dans la formule de dilatation de divers échantillons d'une même matière.

Pour la dilatation du mercure, nous adopterons les nombres de Regnault modifiés par M. Broch (14) et réduits à une fonction du second degré concordant aussi bien que possible avec la première entre 0° et 100°. Pour le verre et le cristal durs, nous partirons

des coefficients trouvés par M. Benoît [1] entre 0° et 40°; *nous supposerons* que l'extrapolation soit permise jusqu'à 100°. Tous les résultats seront rapportés au thermomètre à hydrogène.

Les coefficients des deux termes de la formule exprimant la dilatation du mercure sont :

$$m' = 181756.10^{-9}, \qquad n' = 3,42.10^{-9}.$$

M. Benoît a trouvé, pour la dilatation linéaire du verre et du cristal entre 0° et 40°, les coefficients suivants rapportés à l'échelle des thermomètres en verre dur [2] :

Pour le verre..... $a_v = 7141.10^{-9}$, $b_v = 8,5.10^{-9}$;
» le cristal..... $a_c = 9062.10^{-9}$, $b_c = 9,5.10^{-9}$.

Dans l'échelle du thermomètre à hydrogène, on a

$$a_{v,h} = 7184.10^{-9}. \qquad b_{v,h} = 8,0.10^{-9},$$
$$a_{c,h} = 9116.10^{-9}, \qquad b_{c,h} = 8,9.10^{-9}$$

et, pour la dilatation cubique,

$$m_v = 21552.10^{-9}, \qquad n_v = 24,1.10^{-9},$$
$$m_c = 27330.10^{-9}, \qquad n_c = 26,8.10^{-9}.$$

Ces coefficients se rapportent sensiblement à la dilatation du verre sans résidus. Nous calculerons la dilatation avec les résidus en introduisant les valeurs de μ, ν dans l'équation (3) du n° 89.

Pour calculer ces coefficients, il faut d'abord connaître le *nombre de degrés* que contient le réservoir du thermomètre; en d'autres termes, le nombre réciproque du coefficient de la dilatation apparente du mercure dans le verre. Si cette dilatation était uniforme, ce coefficient serait constant; mais il varie légèrement et doit être calculé pour un intervalle de température déterminé.

Considérons le coefficient moyen entre 0° et 100°. Les nombres ci-dessus nous donnent la valeur de ce coefficient sans les résidus;

---

[1] J.-R. Benoît, *Construction d'étalons prototypes de l'ohm légal*. Gauthier-Villars, 1885.

[2] Ces coefficients ont été déterminés au comparateur sur des tubes de 1^m de long, de 4^{mm} à 5^{mm} de diamètre et de 1^{mm} environ d'ouverture.

après avoir calculé une valeur approchée de la correction relative aux résidus, on répète tout le calcul pour obtenir les nombres définitifs; on trouve alors, pour le coefficient moyen de la dilatation apparente du mercure entre 0° et 100° :

Pour le verre dur..... 158287.10^{-9},
» le cristal..... 152691.10^{-9}.

Le nombre de degrés moyens [0·100] contenus dans le réservoir est donc (¹)

Pour les thermomètres en verre dur..... 6318,
» » en cristal..... 6549.

On en tire (68)

Pour le verre dur..... $\mu_v = 141.10^{-9}$, $\nu_v = 0,1.10^{-9}$,
» le cristal..... $\mu_c = 122.10^{-9}$, $\nu_c = 5,0.10^{-9}$.

Les coefficients de la dilatation avec les résidus sont donc

$$M_v = m_v - \mu_v = 21411.10^{-9}, \quad N_v = n_v - \nu_v = 24,0.10^{-9};$$
$$M_c = m_c - \mu_c = 27208.10^{-9}, \quad N_c = n_c - \nu_c = 21,8.10^{-9}.$$

Ces nombres seront utilisés plus tard.

Nous pouvons, à l'aide des équations (9) du n° 88, calculer les coefficients de la correction relative à la tige. En introduisant les m et n obtenus précédemment, nous trouvons

$$A_{2,v} = 23,92.10^{-6}, \quad B_{2,v} = 0,024.10^{-6};$$
$$A_{2,c} = 29,98.10^{-6}, \quad B_{2,c} = 0,027.10^{-6}.$$

La correction de Poggendorff est donc, pour le verre dur et le cristal, respectivement

$$-\psi_v = -T(100 - T)(23,92 + 0,024T)10^{-6},$$
$$-\psi_c = -T(100 - T)(29,98 + 0,027T)10^{-6}.$$

(¹) Nous avons adopté précédemment, pour le verre dur, le nombre 6250, qui se rapporte à la dilatation moyenne entre 0° et 30° ou à la dilatation vraie à 15°. Comme nous le verrons plus tard, la différence des coefficients des termes en t^2, que nous avons admis pour le mercure et le verre, est sans doute trop forte.

Pour $T = 50^\circ$,

$$-\psi_v = -0{,}063 \text{ degré},$$
$$-\psi_c = -0{,}078 \quad »$$

Dans les limites de la précision atteinte dans ces mesures, nous pouvons exprimer les coefficients indifféremment dans l'échelle t ou T. En combinant les équations ci-dessus entre elles et avec les formules pour la correction totale (92), nous trouvons successivement

$$-(\psi_v - \psi_c) = T(100 - T)(6{,}06 + 0{,}003T)10^{-6}$$

et

$$\varphi'_v - \varphi'_c = T(100 - T)(8{,}07 - 0{,}034T)10^{-6}.$$

Donc

$$A'_{1,v} - A'_{1,c} = +8{,}07.10^{-6}, \qquad B'_{1,v} - B'_{1,c} = -0{,}034.10^{-6}.$$

En nous reportant aux équations (3) du n° 88 et aux équations (10) et (11) du n° 89, nous serons conduits à poser, en simplifiant les formules dans les limites de la précision avec laquelle les coefficients adoptés sont connus,

$$A'_{1,v} - A'_{1,c} = \frac{n' - N_v}{(m' - M_v) + 100(n' - N_v)} - \frac{n' - N_c}{(m' - M_c) + 100(n' - N_c)} = +8{,}070.10^{-6},$$

$$B'_{1,v} - B'_{1,c} = \frac{p' - P_v}{(m' - M_v) + 100(n' - N_v)} - \frac{p' - P_c}{(m' - M_c) + 100(n' - N_c)} = -0{,}034.10^{-6}.$$

La différence $B'_{1,v} - B'_{1,c}$ n'étant pas nulle, on en conclut que le terme en T^3 dans les formules de dilatation n'est pas négligeable dans les limites de la précision que fournissent l'étude et la comparaison des thermomètres. Il n'a pas été fait jusqu'ici de mesures de dilatation desquelles on ait pu conclure à l'existence pratique de ce terme.

Introduisons, dans la première des formules ci-dessus, la valeur des dénominateurs; il vient

$$A'_{1,v} - A'_{1,c} = \frac{n' - N_v}{1584} - \frac{n' - N_c}{1528} = 8{,}07.10^{-13},$$

d'où

$$158{,}4N_c - 152{,}8N_v - 5{,}6n' = 195.10^{-9}.$$

En remplaçant n' par sa valeur et en mettant 155,6 en facteur de N_c et N_v, on trouve

$$155{,}6(N_c - N_v) + 2{,}8(N_c + N_v) = 215.10^{-9}.$$

Le facteur de $N_c + N_v$ est très petit par rapport à celui de $N_c - N_v$; si donc nous introduisons les valeurs approchées de N_c et N_v dans la somme, la différence de ces quantités sera déterminée avec une précision beaucoup plus grande que ces quantités elles-mêmes.

En effectuant le calcul, il vient successivement

$$155,6(N_c - N_v) + 128.10^{-9} = 215,00.10^{-9},$$
$$N_c - N_v = +0,56.10^{-9}.$$

Nous voyons que, contrairement à ce que nous avions admis d'abord, la différence $N_c - N_v$ est positive; $n_c - n_v$ était lui-même positif, et c'est en introduisant la correction pour les résidus de dilatation que la différence a changé de signe. L'erreur porte sur une quantité un peu inférieure à 1.10^{-9} dans le coefficient du terme quadratique de la formule qui exprime la dilatation linéaire; cette erreur est assez petite pour être fortuite; cependant le sens et l'ordre de grandeur de la différence s'accordent avec ce qui aurait dû se produire si, dans les mesures de la dilatation, la tige de cristal n'avait pas atteint toujours la longueur définitive correspondant à la température de la mesure. D'après ce que nous savons sur la lenteur des mouvements du zéro dans les thermomètres en cristal, cette hypothèse est parfaitement justifiée.

Nous ne tirerons pas de nouvelles conclusions de la relation entre les quantités p' et P. Tout le calcul qui précède avait uniquement pour but d'indiquer la marche à suivre pour tirer de nos formules des données très précises lorsqu'on possédera de nouvelles déterminations des quantités qui y entrent.

Il y a lieu maintenant déjà de déterminer de nouveau la dilatation du mercure et du verre, pour un intervalle étendu, en tenant compte des résidus.

Les résultats des expériences que nous exposerons dans le Chapitre V nous montreront que les erreurs des données expérimentales sont plus grandes qu'on ne pourrait le supposer de prime abord, et que même l'application que nous avons faite des formules à la détermination de $N_c - N_v$ introduit une erreur assez grande dans le résultat.

Nous pouvons tirer des résultats des comparaisons une autre conséquence importante. Nous avons trouvé que les thermomètres

du même verre concordent entre eux au-dessous des limites des erreurs d'observation, c'est-à-dire à un millième de degré près environ.

S'il existe des divergences réelles entre deux thermomètres, elles doivent certainement être attribuées à une variation très petite du coefficient n dans la fonction qui représente la dilatation du réservoir. Il faudrait, en effet, admettre une différence très grande dans les valeurs de m pour que cette divergence puisse se rapporter à la tige.

Calculons quelle doit être la variation du coefficient n (ou N) dans A_1 [(88), éq. (3) et (4)] pour produire une variation d'un millième de degré vers 50° dans les indications d'un thermomètre en verre dur.

Partons de la forme simplifiée

$$A_1 = \frac{n' - n}{(m' - m) + 100(n' - n)}.$$

Nous pouvons, comme précédemment, supposer le dénominateur constant et égal à 158.10^{-6}.

En introduisant la valeur de A_1 dans l'expression de φ, et en posant $T = 50$, on aura donc à chercher la variation ε de n, pour laquelle

$$2500\varepsilon \frac{d}{dn} \frac{n' - n}{158.10^{-6}} = \pm 0{,}001.$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$\varepsilon = 6.10^{-11}.$$

La variation de la dilatation linéaire serait de 2.10^{-11}. Nous pouvons en conclure que la variation du coefficient du terme en t^2 dans la dilatation du verre dépasse à peine $\frac{1}{400}$ d'un échantillon à l'autre. Or le dosage du verre est peu précis, et ses propriétés élastiques et thermiques sont relativement mauvaises. Les métaux et alliages que l'on emploie dans la construction des instruments de précision et des étalons de longueur possèdent certainement une plus grande régularité. Il est très probable, d'après cela, que, pour les bons alliages, exactement dosés et soumis à un traitement analogue, le coefficient du terme quadratique ne doit pas différer au delà de 2.10^{-11} d'un échantillon à l'autre.

Pour le platine iridié à 10 pour 100, employé par le Comité international des Poids et Mesures à la construction des étalons de longueur et de masse, ce coefficient, exprimé dans l'échelle du thermomètre à hydrogène, est voisin de 150.10^{-11}; on peut donc être certain que les deux premiers chiffres significatifs de ce nombre ne varient pas. Or les meilleures méthodes directes ne permettent pas de garantir le second à moins de deux ou trois unités près. Le raisonnement qui précède conduit donc à des conclusions toutes nouvelles.

CHAPITRE V.

SUR L'ÉCHELLE THERMOMÉTRIQUE NORMALE.

94. Échelle absolue et échelle normale. — Nous avons donné précédemment la définition d'une échelle thermométrique arbitraire, et nous avons montré que les diverses échelles pratiques des températures diffèrent plus ou moins entre elles suivant la propriété physique au moyen de laquelle la température est définie.

C'est pour opérer une première unification des échelles thermométriques que Gay-Lussac proposa de définir les températures par la dilatation de l'air. A cette époque, la dilatation des corps était, parmi toutes les fonctions continues de la température, la mieux connue, et l'adoption d'un gaz comme corps thermométrique avait surtout pour but de libérer autant que possible l'échelle thermométrique de la dilatation de l'enveloppe.

Mais cette échelle thermométrique était encore arbitraire, et il appartenait à la Thermodynamique de fournir une nouvelle définition des températures, indépendante de toute propriété de la matière. Cette définition, basée sur le principe de Carnot (1824), a été donnée par Sir W. Thomson, en 1848, et modifiée plusieurs fois par cet illustre savant [1]. Nous emprunterons les définitions qui suivent à un travail de M. Lippmann où la question est exposée d'une manière particulièrement claire [2].

---

[1] Les travaux de Sir W. Thomson relatifs à l'échelle absolue ont été publiés principalement dans le *Philosophical Magazine* de 1848 et dans les *Philosophical Transactions* de 1854. (*Voir* aussi *Elasticity and Heat,* d'après les articles de l'auteur dans l'*Encyclopædia Britannica.*)

[2] G. Lippmann, *Définition physique et détermination des températures absolues* (*Journal de Physique,* 2e série, t. III, p. 53 et 277; 1884). — *Voir* aussi

Considérons une machine thermique réversible, fonctionnant entre deux corps A et A_1 de températures différentes; le minimum du rapport $\frac{q_1}{q}$ de la quantité de chaleur cédée au corps froid à la chaleur enlevée au corps chaud est indépendant de la machine employée pour transformer la chaleur en travail.

Supposons que, le générateur restant le même, la température du récipient varie; le rapport $\frac{q_2}{q}$ des chaleurs cédées et reçues sera de même déterminé par les températures des corps A et A_2, ... Désignons par T, T_1, T_2, ... les températures des diverses sources de chaleur; nous conviendrons d'écrire

$$T : T_1 : T_2 : \ldots = q : q_1 : q_2 : \ldots.$$

Cette série de rapports définit les températures absolues T, T_1, T_2, ...

La valeur numérique de l'un des T reste arbitraire. En adoptant, par exemple, pour le zéro usuel, la valeur changée de signe du zéro absolu dans le système centigrade, les intervalles de température seront exprimés en degrés centigrades.

La recherche pratique d'une échelle des températures absolues n'est pas limitée à des cycles réversibles. Un grand nombre de cycles non réversibles, tels que la dilatation d'un corps quelconque, la vaporisation d'un liquide, peuvent se prêter à la détermination d'une échelle absolue; il suffit, pour cela, de posséder des données numériques sur un certain nombre de propriétés physiques des corps adoptés ([1]).

Le plus simple de tous les cycles et le mieux étudié est précisément celui par lequel Gay-Lussac avait défini les températures.

R. Blondlot, *Introduction à l'étude de la Thermodynamique;* Gauthier-Villars, 1888.

([1]) MM. Raoul Pictet et Gustave Cellérier ont construit un thermographe basé sur la tension maxima des vapeurs de divers liquides et, en particulier, de l'acide sulfureux. Au moyen de cet appareil, un mélange de protoxyde d'azote et d'acide carbonique fournirait, jusqu'à —180°, des indications thermométriques dans lesquelles l'extrapolation n'aurait rien d'arbitraire [*Méthode générale d'intégration continue d'une fonction numérique quelconque, à propos de quelques théorèmes fournis par l'analyse mathématique d'un nouveau thermographe* (*Arch. de Gen.*, t. LXIV, p. 185; 1878)].

Les corps fictifs que l'on nomme *gaz parfaits* jouissent de la propriété de fournir, par leur dilatation, une échelle thermométrique identique à l'échelle absolue. Par un heureux hasard, l'échelle usuelle se trouvait ainsi en accord presque parfait avec une échelle donnée beaucoup plus tard par la théorie (1).

En réalité, l'échelle fournie par chaque gaz diffère un peu de l'échelle absolue; les différences peuvent être calculées à l'aide d'un certain nombre de données, dont les principales sont les écarts de la loi de Mariotte et la variation de la température produite pendant la décompression. Ce dernier phénomène a été étudié principalement par MM. Thomson et Joule (2).

95. Réduction des indications des thermomètres à air et à acide carbonique à l'échelle absolue. — La discussion complète de toutes les données au moyen desquelles les indications des thermomètres à gaz sont ramenées à l'échelle absolue est longue et compliquée; nous ne saurions la reproduire en entier, et nous renverrons pour cela aux ouvrages spéciaux. Nous nous bornerons à donner ici les résultats des calculs de MM. Thomson et Joule, de M. Jochmann (3) et d'une discussion très complète de M. Weinstein (4).

Les résultats relatifs à l'air sont résumés dans le Tableau suivant. La première colonne contient les températures τ dans l'échelle absolue, à partir du zéro usuel; les cinq colonnes suivantes donnent les excès des indications du thermomètre à air à volume constant sur l'échelle τ. Les calculs de M. Jochmann et de M. Weinstein ont été faits en partant de la première série de Regnault sur la courbe isothermique de l'air à 0° et de la moyenne de ses trois séries.

---

(1) Cette proposition n'est vraie que pour les températures où les gaz sont très éloignés de leur point de liquéfaction. Nous y reviendrons dans la suite.

(2) W. Thomson et Joule, *On the thermal effects of fluids in motion* (*Phil. Trans.*; 1853, 1854, 1863).

(3) Jochmann, *Beiträge zur Theorie der Gase* (*Schlömilch Zeitschrift für Math. und Phys.*, t. V, p. 24 et 96; 1860).

(4) B. Weinstein, *Ueber die Reduktion der Angaben von Gasthermometern auf absolute Temperaturen* (*Metronomische Beiträge*, n° 3, 1881). Les nombres de M. Weinstein nous paraissent être les plus probables.

EXCÈS DU THERMOMÈTRE A AIR SUR L'ÉCHELLE ABSOLUE.

τ.	D'APRÈS JOCHMANN.		D'APRÈS WEINSTEIN.		D'APRÈS THOMSON et JOULE.
	Première série.	Moyenne.	Première série.	Moyenne.	
0°	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	+0,002	0,000	+0,006	+0,007	
20	+0,003	0,000	+0,010	+0,013	+0,030
30	+0,003	+0,001	+0,013	+0,016	
40	+0,004	+0,001	+0,014	+0,018	+0,040
50	+0,004	+0,001	+0,015	+0,019	
60	+0,004	+0,001	+0,014	+0,018	+0,036
70	+0,003	+0,001	+0,013	+0,015	
80	+0,003	0,000	+0,009	+0,012	+0,022
90	+0,002	0,000	+0,005	+0,006	
100	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Les résultats des calculs de M. Jochmann et de M. Weinstein relatifs à l'acide carbonique sont réunis ci-après. M. Jochmann a introduit dans ses calculs les valeurs de c_p trouvées par Regnault et par M. Wiedemann; M. Weinstein a combiné entre elles diverses valeurs de c_p et de $\frac{c_p}{c_v}$.

EXCÈS DU THERMOMÈTRE A ACIDE CARBONIQUE SUR L'ÉCHELLE ABSOLUE.

τ.	D'APRÈS JOCHMANN.		D'APRÈS WEINSTEIN.
	c_p Regnault.	c_p Wiedemann.	
0°	0,000	0,000	0,000
10	+0,015	+0,018	+0,020
20	+0,026	+0,031	+0,034
30	+0,034	+0,040	+0,045
40	+0,040	+0,046	+0,051
50	+0,041	+0,047	+0,053
60	+0,039	+0,045	+0,050
70	+0,033	+0,039	+0,043
80	+0,025	+0,029	+0,032
90	+0,013	+0,016	+0,018
100	0,000	0,000	0,000

Nous comparerons plus tard (**114**) ces résultats aux différences trouvées directement entre les thermomètres à azote et à acide carbonique.

96. Recherches modernes sur le thermomètre à gaz. — Pendant longtemps, les recherches de Regnault [1] sur le thermomètre à gaz demeurèrent les plus précises et les plus étendues que l'on possédât; ces belles expériences, exécutées vers 1840, suffisaient aux besoins de la Science; mais, plus tard, de nouvelles études devinrent nécessaires. Les recherches récentes se divisent d'elles-mêmes en trois groupes ayant des tendances différentes et leurs moyens d'investigation propres.

Ce sont d'abord les expériences aux températures très basses, qui se sont étendues jusqu'à la liquéfaction des gaz désignés, il y a peu d'années, sous le nom de *permanents*. L'appréciation des températures les plus basses qui aient été atteintes laisse un peu de part à l'arbitraire; on peut en fixer la limite à — 225°. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette importante question.

Les recherches aux températures élevées forment un autre groupe; la limite y est imposée surtout par la déformabilité et la perméabilité des réservoirs. Les expériences ayant fourni des résultats de quelque valeur paraissent s'être arrêtées vers 1400° [2].

Enfin, le troisième groupe est constitué par les recherches de précision aux températures moyennes. Toutes les expériences récentes ayant pour but la comparaison des thermomètres à mercure avec le thermomètre à gaz rentrent dans ce dernier groupe. Elles forment deux subdivisions : les recherches très précises (la limite de la précision est peu éloignée du millième de degré) à des températures inférieures à 100° et les expériences de moyenne précision au-dessus de 100°.

Nous nous occuperons essentiellement des recherches très précises, dont l'étude formera la majeure partie de ce Chapitre ; nous donnerons ensuite quelques détails sur les comparaisons de

---

(1) REGNAULT, *Dilatation des fluides élastiques* (*Relation des expériences*, t. I).

(2) *Voir*, en particulier, J. VIOLLE, *Chaleurs spécifiques et températures de fusion de plusieurs métaux réfractaires* (*Comptes rendus*, p. 702; 1879).

moindre précision aux températures que les expériences précises n'ont pas encore atteintes. Enfin, nous exposerons brièvement les résultats de quelques recherches aux températures très basses ou très élevées.

Parmi les expériences précises, celles qui ont été exécutées au Bureau international des Poids et Mesures occupent le premier rang; elles font partie du grand ensemble de recherches commencées en 1878, sous les auspices du Comité international, dans le but de préparer l'unification de l'échelle thermométrique. Ces expériences peuvent être considérées aujourd'hui comme terminées; elles ont fourni les éléments de la discussion sur le choix d'une échelle normale des températures (**113**).

Un premier travail fut confié à M. Pernet, qui prépara et commença l'étude du thermomètre à hydrogène. Ses comparaisons, dont les résultats n'ont pas encore été publiés, ont été faites entre 0° et 35°.

Plus tard, M. Chappuis construisit un nouvel appareil et reprit le travail *ab ovo;* nous exposerons ici la méthode qu'il a suivie et rendrons compte de ses résultats (¹).

EXPÉRIENCES DE M. CHAPPUIS.

MÉTHODE ET APPAREILS.

97. Méthode. — La méthode adoptée par M. Chappuis est celle du thermomètre à gaz *à volume constant*. Le principe de cette méthode consiste à évaluer les températures par la variation de la tension du gaz, cette quantité étant supposée une fonction linéaire de la température. Le degré est donc représenté par la

---

(¹) Les nos 97 à 112 sont le résumé du Mémoire de M. Chappuis déjà mentionné : *Études sur le thermomètre à gaz et comparaisons des thermomètres à mercure avec le thermomètre à gaz* (*T. et M.*, t. VI, 1888); nous citerons plusieurs fois textuellement le Mémoire original.

Voir, pour les travaux antérieurs :

RECKNAGEL, *Thermometrische Versuche* (*Pogg. Ann.*, t. CXXIII, p. 115; 1876).

ROWLAND, *On the mechanical equivalent of heat* (*voir* p. 213).

PERNET et GRUNMACH, *Vergleichungen von Quecksilberthermometern mit dem Luftthermometer* (*Metronomische Beiträge*, n° 3; Berlin, 1881).

centième partie de l'accroissement entre 0° et 100° de la pression exercée par le gaz.

Dans l'emploi de cette méthode, on suppose que le volume du gaz est rigoureusement constant et que la température de toute sa masse est uniforme. Or ces conditions ne peuvent être qu'imparfaitement remplies; car, d'une part, l'enveloppe se déforme nécessairement sous l'influence de la température et de la pression; d'autre part, la tension du gaz doit être mesurée au moyen d'un manomètre qui ne peut pas être soumis aux variations de température auxquelles le réservoir est exposé. L'ensemble des parties de l'appareil servant à transmettre la pression du réservoir à la surface du mercure se nomme *espace nuisible;* il se compose d'un tube fin et d'une chambre située au-dessus de la branche fermée du manomètre.

Les écarts des suppositions théoriques obligent à appliquer aux mesures des corrections calculées en admettant les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

Il est naturellement avantageux de disposer l'appareil de telle sorte que les corrections, sur lesquelles règne toujours un peu d'incertitude, soient réduites à un minimum.

On sera donc conduit d'abord à choisir, pour la construction du réservoir, un corps peu dilatable, et à donner à ses parois une résistance suffisante. Puis, comme les erreurs dues à l'espace nuisible sont proportionnelles au rapport de son volume à celui du réservoir, on cherchera à rendre ce rapport aussi petit que possible.

Les phénomènes d'absorption des gaz par les solides et d'*adsorption* [1] à leur surface, la perméabilité, les résidus de dilatation, la conductibilité, etc., limitent le choix de l'enveloppe. Quant à la forme qu'il convient de lui donner, elle est subordonnée, dans une certaine mesure, à la rapidité des indications que l'on veut obtenir. On cherche généralement à rendre le rapport de la surface au volume aussi grand que possible.

98. Description des appareils. — Les appareils de M. Chap-

---

[1] Le mot *adsorption* désigne, en allemand, la condensation d'un gaz à la surface d'un solide. Bien que nous ne l'ayons rencontré dans aucun ouvrage français, nous avons cru pouvoir l'employer dans le même sens.

puis ont été construits de manière à tenir compte, autant que possible, de toutes les conditions imposées à un thermomètre à gaz de haute précision. Nous décrirons ses différentes parties.

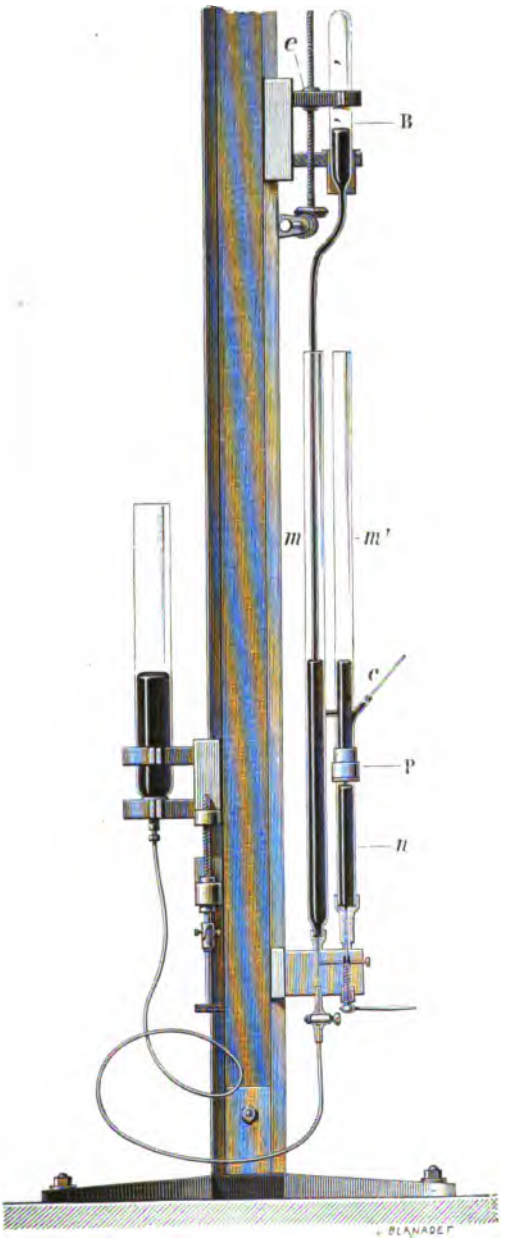
Réservoir. — Le réservoir est constitué par un tube V (*Pl. I*) d'une capacité supérieure à 1^{l}; il a $1^{m},10$ de longueur et un diamètre de 36^{mm}; il est constitué par une enveloppe de platine iridié laminé de 1^{mm} d'épaisseur environ. Il est relié au manomètre par un tube *cc* de 1^{m} de longueur et de $0^{mm},7$ de diamètre intérieur.

Manomètre. — La pression à laquelle le gaz est soumis se compose de la pression atmosphérique, mesurée au moyen du baromètre, et d'une pression additionnelle donnée par un manomètre à air libre. Chaque mesure se compose donc, en principe, de quatre lectures qui, en général, sont faites séparément. M. Chappuis les a réduites à deux en réunissant, en un même tube *m* (*fig.* 29), la cuvette du baromètre B et la branche ouverte du manomètre. Un autre tube *m'*, communiquant avec *m*, sert, le cas échéant, à mesurer la position du ménisque inférieur du baromètre. L'appareil peut donc être employé comme manomètre et comme baromètre; il est à tube mobile et à réservoir auxiliaire (*voir* p. 18); les trois ménisques sont dans la même verticale. Lorsque l'appareil est employé comme manomètre, il suffit de déterminer la position des ménisques extrêmes. Le tube du baromètre est muni de pointes. La pièce d'acier P, mastiquée sur le tube du manomètre *n* (détail *fig.* 30), porte aussi une pointe très fine, de $0^{mm},6$ de longueur, dont l'extrémité verticale est située au-dessus du centre du ménisque. Pour lire le ménisque inférieur du baromètre, on fixe sur le tube *m'* une armature en laiton supportant une tige d'acier terminée par une pointe de verre (voir *Pl. I*); le mouvement de cette tige est commandé par une vis. Les tubes ont un diamètre intérieur de 25^{mm}.

La communication entre les tubes *n* et *m* peut être interrompue par un mécanisme représenté *fig.* 31. Un robinet est interposé aussi entre le tube *m* et le réservoir auxiliaire.

Tout l'appareil est supporté par une pièce de fer rabotée, fixée par des boulons sur un monolithe. Le baromètre et le réservoir auxiliaire peuvent être déplacés d'un mouvement rapide, en des-

Fig. 29.



serrant les vis de calage, ou d'un mouvement lent à l'aide de vis dont l'une, passant dans l'écrou *e*, est commandée par un engrenage à angle droit.

Le cathétomètre qui accompagne le manomètre est formé par une colonne d'acier de $1^{m},80$ de hauteur et de 45^{mm} de diamètre;

Fig. 30.

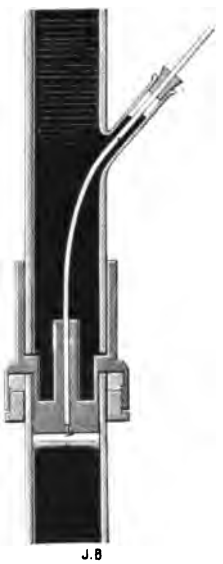
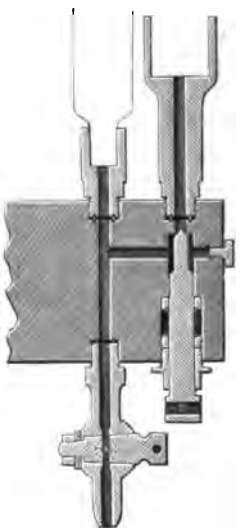


Fig. 31.



elle est maintenue par deux équerres en fonte boulonnées sur un fort pilier de pierre, et porte trois lunettes avec micromètres.

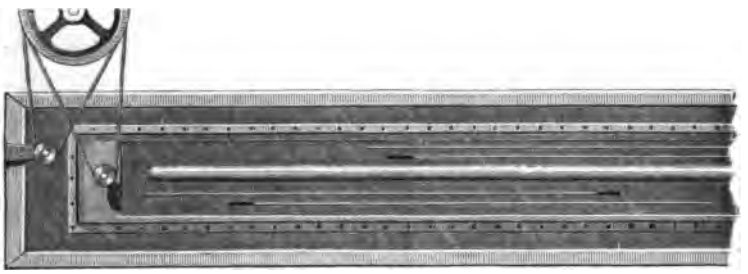
La règle est en laiton, avec divisions en millimètres sur une lame d'argent incrustée; elle a la forme d'un H et une longueur de $1^{m},50$; elle est suspendue au support du manomètre parallèlement à son axe.

Quatre thermomètres servent à déterminer la température de l'appareil.

Auge, étuve et accessoires. — L'auge destinée aux comparaisons se compose d'un demi-cylindre (*fig.* 32 et 33, plan et coupe) en laiton, à doubles parois, porté sur deux lames verticales dans une grande caisse du même métal garnie de bois. Un cadre ajusté sur le pourtour de l'auge intérieure supporte une glace épaisse

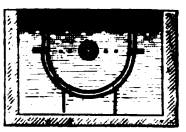
qui recouvre le liquide. Deux hélices servent à agiter le liquide dans les deux auges.

Fig. 32.



Dans les comparaisons au-dessus de 0°, l'auge intérieure est remplie d'eau maintenue à température constante par une circu-

Fig. 33.



lation dans l'auge extérieure. Aux températures plus basses, l'auge extérieure contient un mélange réfrigérant et l'auge intérieure est remplie d'alcool.

Pour les comparaisons dans les vapeurs, le cadre est remplacé par un couvercle complétant le cylindre (*Pl. I*), surmonté de quatre tubes à coulisse pour les thermomètres. Les manchons extérieurs des deux moitiés du cylindre communiquent par une série de trous. Deux tubulures s, s' mettent les deux parties de l'étuve en communication avec un condenseur R.

La vapeur développée dans la chaudière C parcourt l'intérieur de l'étuve, passe dans le manchon et dans les tubes à coulisse, et revient au condenseur par les tubes r et r'. La chaudière peut être chauffée à l'aide d'un brûleur ou au moyen de la vapeur d'eau développée dans la chaudière C'.

Dans les déterminations du point 100, le manomètre e indique la surpression dans l'appareil.

Thermomètres à mercure. — Les thermomètres à mercure,

dont la différence de marche par rapport au thermomètre à gaz doit être déterminée, sont placés dans l'auge ou dans les tubes à coulisse. Ils sont au nombre de quatre de chacun des types 1 *a* et 1 *d* (p. 5). Tous ces thermomètres, étudiés d'après les procédés les plus complets décrits précédemment, ont été comparés entre eux à toutes les températures auxquelles leurs corrections par rapport au thermomètre à gaz ont été déterminées. Les résultats de ces comparaisons ont été donnés précédemment (**91**).

99. Constantes des instruments. — Le réservoir du thermomètre à gaz appartient à l'Institut de France, qui l'a obligeamment mis à la disposition du Bureau international pour les travaux de M. Chappuis. Une partie de ses constantes ont été déterminées par MM. Sainte-Claire Deville et Mascart au cours de leurs recherches préparatoires pour la construction de la règle géodésique internationale.

Son volume est, à 0°, d'après ces observateurs,

$$V_0 = 1^l,038\,990.$$

Cette valeur a été admise sans nouvelles déterminations.

La dilatation linéaire du réservoir a été déterminée par les mêmes observateurs au moyen de quatre séries d'observations faites dans le voisinage de 0°, 32°,6, 77°,9 et 99°,6. La première et la dernière de ces mesures sont de beaucoup les plus certaines. M. Chappuis a donc calculé la dilatation moyenne entre 0° et 100° par ces deux observations; pour calculer les deux termes d'une formule parabolique, il a admis, pour le coefficient du terme en t^2, la moyenne des nombres trouvés par M. Benoît sur huit échantillons de platine iridié, et déduit le premier coefficient de ce nombre et du coefficient moyen (¹). Les deux coefficients admis pour la dilatation cubique sont

$$\alpha = 25,649.10^{-6},$$
$$\beta = 7,12\ .10^{-9}.$$

Ils sont exprimés dans l'échelle des thermomètres en cristal de l'appareil Fizeau, du Bureau international.

(¹) Ce mode de calcul est motivé par les considérations du n° 93.

Le coefficient de pression intérieure du réservoir seul est, en millimètres cubes par millimètre de pression mercurielle,

$$\beta_i = 0,023\,37.$$

Le volume de l'espace nuisible se décompose comme suit :

	ml
Capacité du tube capillaire.....	0,5520
Volume du canal dans le bouchon d'acier.....	0,0019
Capacité du tube *n* entre la pointe et le plan...	0,3126
Volume du mercure déprimé.....	0,2050
	1,0715

Lorsque le mercure n'affleure pas la pointe, il faut ajouter à ce volume $0^{ml},4772$ par millimètre de distance.

La distance à 0° des traits 0 et 1000 sur la règle du manomètre est

$$l_0 = 1^m,000\,030.$$

Son coefficient de dilatation, par rapport au thermomètre à hydrogène, est (¹)

$$\alpha_t = (18759 + 5,55\,t)\,10^{-9}.$$

100. Calcul des températures. — Comme nous l'avons indiqué plus haut, la méthode adoptée pour la mesure des températures suppose que le volume de la masse gazeuse sur laquelle on opère demeure invariable, quelle que soit la température. Nous avons vu que cette supposition ne peut être réalisée pratiquement d'une manière rigoureuse, et que l'on devra réduire les conditions pratiques au cas idéal par l'application de termes de correction.

Il nous reste à montrer comment on calcule les températures du thermomètre à gaz.

Soient

V_0 le volume à 0° du gaz contenu dans le réservoir thermométrique;

(¹) Dans le calcul des comparaisons entre les thermomètres à mercure et le thermomètre à gaz, on procède, en principe, par deux approximations. Dans la première, les températures sont exprimées dans l'échelle du thermomètre à mercure; dans la seconde, on introduit des valeurs approchées de la température exprimée dans l'échelle du thermomètre à gaz.

δ le coefficient moyen de dilatation du réservoir entre 0° et T°;
α_p le coefficient de dilatation du gaz sous volume constant;
v le volume de l'espace nuisible;
t la température du gaz dans l'espace nuisible;
Δv et Δt les variations du volume et de la température de l'espace nuisible;
H_0 la pression initiale réduite du gaz, correspondant à la température de 0°;
$H_0 + h$ la pression du gaz à la température T qu'il s'agit de déterminer;
β_i le coefficient de pression du réservoir thermométrique.

La masse du gaz renfermé dans l'appareil à la température initiale de 0° a pour expression

$$\left(V_0 + \frac{v}{1+\alpha_p t}\right)\frac{H_0}{760}.$$

A la température T, cette même masse est exprimée par

$$\left[\frac{V_0(1+\delta T)+\beta_i h}{1+\alpha_p T} + \frac{v+\Delta v}{1+\alpha_p(t+\Delta t)}\right]\frac{H_0+h}{760}.$$

On a donc, en multipliant par 760,

$$(1)\quad \left(V_0 + \frac{v}{1+\alpha_p t}\right)H_0 = \left[\frac{V_0(1+\delta T)+\beta_i h}{1+\alpha_p T} + \frac{v+\Delta v}{1+\alpha_p(t+\Delta t)}\right](H_0+h).$$

Supposons que l'on ait réduit le volume $v + \Delta v$ du gaz dans l'espace nuisible et sa température $t + \Delta t$ au volume initial v et à la température t, par l'application à la pression $H_0 + h$ de corrections appropriées dont nous parlerons tout à l'heure. Soit $H_0 + h'$ la pression ainsi corrigée; nous avons alors

$$(2)\quad \left(V_0 + \frac{v}{1+\alpha_p t}\right)H_0 = \left[\frac{V_0(1+\delta T)+\beta_i h'}{1+\alpha_p T} + \frac{v}{1+\alpha_p t}\right](H_0+h').$$

On tire de cette formule, après quelques simplifications,

$$(3)\quad \alpha_p T = \frac{H_0+h'}{H_0}\,\frac{V_0(1+\delta T)+\beta_i h'}{V_0} + \frac{h'v}{H_0 V_0}\,\frac{1+\alpha_p T}{1+\alpha_p t} - 1.$$

Cette formule peut servir à déterminer le coefficient α_p entre

des températures connues, 0° et 100° par exemple. Le membre de droite contient, il est vrai, outre les termes connus, la quantité à déterminer; mais on voit immédiatement que α_p peut être calculé par des approximations successives; car le terme du deuxième membre qui renferme cette quantité est multiplié par le rapport très petit de l'espace nuisible au volume du réservoir.

Le coefficient α_p ayant été déterminé par des expériences spéciales, on pourra calculer la température du gaz T dans une expérience quelconque; ce calcul devra aussi être fait en deux approximations. Dans des comparaisons avec le thermomètre à mercure, la première valeur approchée peut être déduite de l'indication de ces derniers.

Corrections relatives à l'espace nuisible. — Les formules précédentes seraient immédiatement applicables aux observations, si le volume et la température du gaz renfermé dans l'espace nuisible étaient invariables. Ni l'une ni l'autre de ces conditions n'est en général rigoureusement remplie dans les expériences; il est donc nécessaire d'appliquer aux pressions observées deux termes de corrections se rapportant respectivement à la variation du volume et à la variation de la température du gaz dans l'espace nuisible.

I. Supposons d'abord que le volume de l'espace nuisible ait seul varié; nous aurons, d'après la loi de Mariotte, si nous désignons en général par V le volume total du gaz contenu dans l'appareil, par p sa pression et par Δp la variation de pression correspondant à la variation du volume Δv,

$$(4) \qquad Vp = (V + \Delta v)(p + \Delta p);$$

d'où l'on tire

$$(5) \qquad \Delta p = p\left(\frac{V}{V + \Delta v} - 1\right).$$

Cette équation n'est exacte que lorsque la température du gaz est partout la même. Quand la température t de l'espace nuisible diffère sensiblement de la température T du réservoir thermométrique, il faut ramener le volume Δv à celui qu'occuperait le gaz à la température T, savoir $\Delta v[1 + \alpha(T - t)]$; on a donc généra-

lement

$$(6) \qquad \Delta p = p\left\{\frac{V}{V + \Delta v[1 + \alpha(T - t)]} - 1\right\},$$

pour le changement de pression dû aux petites variations du volume gazeux contenu dans l'espace nuisible. La correction qui en résulte est $-\Delta p$.

On déterminera donc, à chaque observation, la petite différence du volume Δv correspondant à la distance du niveau du mercure à la pointe fixe qui sert de repère, et l'on calculera la valeur correspondante de la correction $-\Delta p$ par la formule ci-dessus.

II. Soient

v la capacité de l'espace nuisible;
t la température de départ;
$t + \Delta t$ la température de l'espace nuisible.

Le changement Δv qu'éprouverait le volume v dans la réduction de $t + \Delta t$ à t est

$$(7) \qquad \Delta v = \frac{v}{1 + \alpha\Delta t} - v = -\frac{v\alpha\Delta t}{1 + \alpha\Delta t}.$$

Ce changement de volume déterminé pour chaque observation, on calculera la correction $-\Delta p$ due à cette variation de volume par la formule (6); les corrections pour les variations de température se trouvent ainsi ramenées au cas précédent.

101. Influence des erreurs d'expérience. — Pour calculer l'influence des petites erreurs d'expérience sur les quantités T et α, il suffit de conserver les termes principaux de la formule qui sert à les calculer; nous écrirons donc

$$(1) \qquad \alpha T = \frac{H_0 + h'}{H_0} - 1 = \frac{h'}{H_0}.$$

Toutes les autres quantités qui entrent dans la formule sont des termes correctifs.

Erreurs dans la mesure des pressions. — On aura d'abord,

en différentiant T par rapport à h',

$$(2) \qquad dT = \frac{dh'}{H_0 \alpha}.$$

L'influence d'une petite erreur dans la mesure de la pression sur la détermination de T est donc indépendante de la température et inversement proportionnelle à la pression initiale; la sensibilité du thermomètre à gaz augmente donc proportionnellement à la pression initiale.

Soient, par exemple, $H_0 = 1^m$, $\alpha = 0{,}00367$, $dh' = 0^{mm}{,}01$:

$$(2') \qquad dT = 0{,}0027 \text{ degré}.$$

L'influence, sur la valeur de α, d'une erreur constante dH_0 commise dans la mesure de toutes les pressions résulte de l'équation

$$(3) \qquad d\alpha = -\frac{h'}{TH_0^2} dH_0;$$

Or

$$(4) \qquad \frac{h'}{H_0} = \alpha T,$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dH_0}{H_0}.$$

Supposons, en plus des nombres ci-dessus, $dH_0 = 0^{mm}{,}01$; on aura

$$(5') \qquad d\alpha = \alpha . 10^{-5} = -3{,}67 . 10^{-8}.$$

Une erreur de ce genre n'a, du reste, aucune influence sur les termes de premier ordre de l'équation d'où la température est déduite; on a, en effet,

$$(6) \qquad T = \frac{h'_T}{\alpha H_0}$$

et

$$(7) \qquad \alpha = \frac{h'_{100}}{100 H_0},$$

d'où

$$(8) \qquad T = 100 \frac{h'_T}{h'_{100}}.$$

Or h'_T et h'_{100} sont des différences qui ne contiennent plus l'erreur constante sur la mesure de la pression.

Erreur dans la valeur de α. — L'équation (1) donne

$$dT = -\frac{T}{\alpha}\,d\alpha.$$

L'influence d'une erreur dans la mesure de α sur la valeur de T est donc sensiblement proportionnelle à la température.

Supposons encore

$$d\alpha = 1.10^{-7}.$$

L'erreur à 100° est de 0,0027 degré.

Erreurs dans la mesure du volume et de la température de l'espace nuisible. — Des formules relatives aux corrections pour l'espace nuisible, on peut déduire l'influence d'une erreur dans la détermination de la distance de la pointe fixe au mercure dans la branche fermée du manomètre, ou dans la mesure de la température de l'espace nuisible, sur la température T que l'on veut mesurer. On trouve ainsi, dans le cas actuel, en posant $p = 1^m$, qu'une erreur de $0^{mm},01$ dans la mesure de la distance du mercure au repère modifie la valeur de T de 0,0012 degré dans le voisinage de 0° et de 0,0016 degré près de 100°.

Une erreur de 1 degré dans la mesure de la température de l'espace nuisible entraîne une incertitude de 0,001 degré environ de la température T.

Ces formules peuvent aussi servir à évaluer l'influence d'une erreur du coefficient de dilatation du réservoir thermométrique.

Supposons, par exemple, que l'on ait admis, au lieu du coefficient à deux termes adopté

$$(25\,649 + 7,12\,t)\,10^{-9},$$

le coefficient moyen entre 0° et 100°, savoir

$$26,361.10^{-6}.$$

On aurait trouvé à 50°, pour la capacité du réservoir, $1^l,04\,359$, au lieu de $1^l,040\,341$.

La différence $\Delta v = 18^{mm^3}$ de ces volumes aurait produit une erreur de 0,0046 degré.

Quant aux variations de volume du réservoir thermométrique produites par les variations de la pression intérieure, leur influence sur la mesure des températures est nulle. Il n'en est pas de même quand il s'agit de la détermination du coefficient de dilatation du gaz. Dans le cas actuel, où la pression initiale était voisine de 1^m, le changement de volume Δv, causé par l'augmentation de la pression intérieure, lorsqu'on passait de 0° à 100°, était de $8^{mm^3},7$. On a donc $\Delta p = 0^{mm},0113$; dans les suppositions faites précédemment, la variation de pression qui sert de mesure à α est voisine de 367^{mm}. En négligeant l'effet de la pression intérieure sur la capacité du réservoir thermométrique, on introduit donc une erreur d'une unité dans le cinquième chiffre du coefficient de dilatation α.

102. Marche des expériences. — Toutes les mesures de la température à l'aide du thermomètre à gaz se réduisent à la mesure de la distance des deux ménisques extrêmes dans la branche fermée du manomètre et dans la branche fermée du baromètre.

Dans les expériences de M. Chappuis, la communication entre les deux branches du manomètre était interrompue par le robinet à vis pendant toute la période préparatoire des mesures. Puis, lorsque la température était à peu près établie, on amenait, par un déplacement convenable du réservoir auxiliaire, le niveau du mercure dans la branche ouverte aussi près que possible de l'endroit qu'il devait occuper dans les mesures. On établissait alors la communication, et l'on rectifiait le réglage de manière que les ménisques fussent à une très petite distance des pointes.

Chaque mesure de la pression comprenait alors les opérations suivantes :

1° Observation, sur la règle, des millimètres situés au niveau des ménisques; 2° observation des thermomètres auxiliaires; 3° mesure de la position de la pointe fixe qui sert de repère; 4° cinq pointés du ménisque inférieur et quatre pointés du ménisque supérieur effectués alternativement aux deux microscopes;

5° observation des thermomètres auxiliaires; 6° observation des millimètres.

Détermination du zéro. — Le couvercle de l'auge ayant été enlevé, on introduisait de la glace finement rapée et trempée d'eau distillée, à la fois dans l'auge intérieure et dans l'auge extérieure; cette glace était tassée autour du réservoir du thermomètre à gaz. Le remplissage de l'auge exigeait environ 35^{l} de glace. Les mesures de la pression commençaient une heure après la préparation de l'expérience. Chaque détermination du zéro comprenait généralement quatre mesures complètes de la pression.

Détermination du point 100. — Après avoir renfermé le réservoir du thermomètre dans l'étuve que nous avons décrite (98), on établissait la circulation de la vapeur développée dans la chaudière C (*Pl. I*). Le baromètre, muni de l'armature mobile fixée sur la branche ouverte, servait à mesurer la pression atmosphérique d'où la température de la vapeur était déduite. La construction particulière du manomètre permettait d'effectuer simultanément les mesures au baromètre et au manomètre. Dans la suite des observations que nous avons énumérées, l'opération n° 4 était remplacée par des pointés faits successivement aux trois microscopes et commençant alternativement au microscope supérieur et au microscope inférieur; entre chaque groupe de trois lectures, on notait l'indication du manomètre à eau fixé à l'étuve. Une observation complète se composait de quatre groupes de lectures des trois ménisques.

Comparaisons. — Pour les comparaisons dans les liquides (eau ou alcool), les thermomètres étaient couchés dans l'auge et disposés symétriquement autour du réservoir en platine. Leur position était intervertie après chaque série. La *fig.* 34 montre la disposition des thermomètres dans la première série.

Chaque observation complète de la différence entre les thermomètres consistait en une mesure de la pression dans laquelle on intercalait, après la première lecture des thermomètres auxiliaires et avant la seconde, la lecture des quatre thermomètres étalons. Les comparaisons aux températures élevées ou très basses, ainsi que celles qui étaient faites dans les vapeurs, nécessitaient

le concours de deux observateurs, l'un pour les thermomètres, l'autre pour le manomètre; les lectures étaient alors multipliées.

Fig. 34.

Le zéro des thermomètres étalons était déterminé avant et après chaque série, sauf dans les comparaisons au-dessous de 0° où il n'était déterminé qu'après.

Il a été fait, à chaque température, quatre séries de quatre observations complètes, réparties sur deux jours au minimum.

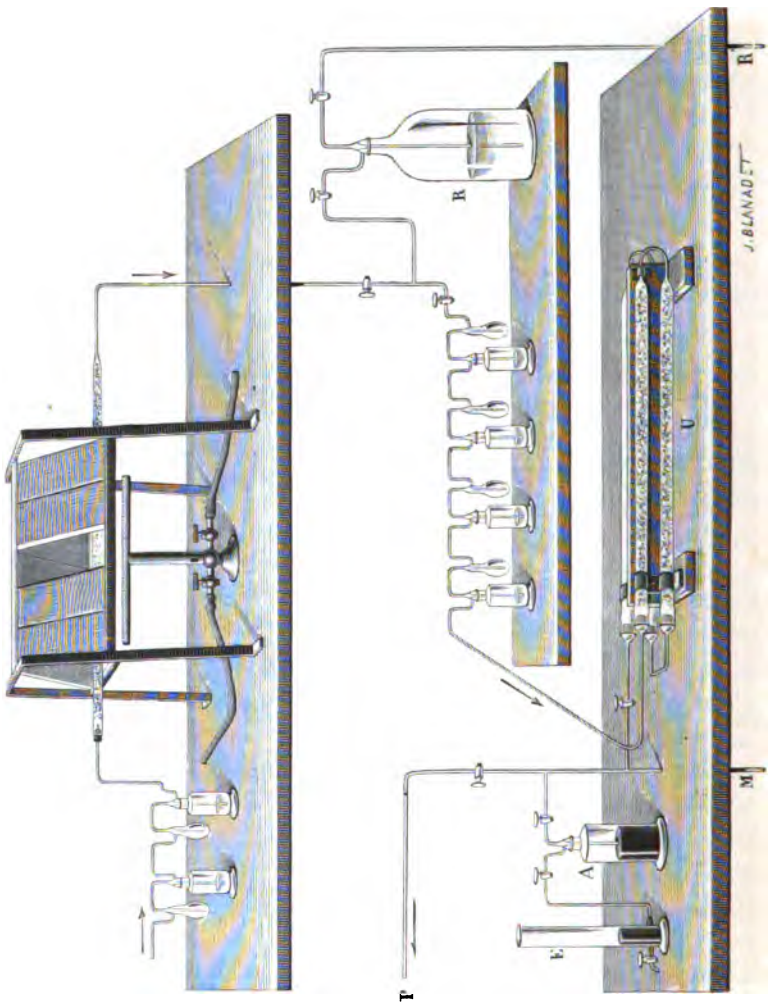
THERMOMÈTRE A AZOTE.

103. Préparation et desséchement de l'azote; remplissage du réservoir. — La méthode suivie par M. Chappuis pour la préparation de l'azote consiste à faire passer de l'air privé d'acide carbonique sur du cuivre divisé, chauffé au rouge.

L'appareil qui a servi à la préparation et au desséchement de l'azote est représenté dans la *fig.* 35. Il est constitué par un tube en verre de Bohême rempli de tournure de cuivre, placé horizontalement sur un fourneau ou grille à analyse. Il communique, d'une part, avec l'air extérieur, par l'intermédiaire de flacons laveurs contenant de l'acide sulfurique et une solution de potasse caustique; d'autre part, avec une grande bouteille R d'une capacité de $3^{l},5$. Cette bouteille est remplie d'une solution concentrée de potasse caustique que l'on fait écouler par un siphon muni d'un robinet dans une deuxième bouteille placée au-dessous. Le siphon étant amorcé et le tube chauffé au rouge sombre, il suffit de disposer convenablement les robinets pour faire passer, à travers les flacons laveurs et le tube chauffé, un courant d'air qui s'y débarrasse de son acide carbonique et de son oxygène, et vient remplacer dans le réservoir R le liquide écoulé. On peut régler cet écoulement à l'aide du robinet placé sur le siphon, et obtenir ainsi un courant très lent et régulier assurant la complète absorption de l'oxygène.

Le gaz renfermé dans le réservoir R doit encore être desséché avant d'être conduit dans le réservoir thermométrique. A sa sortie du réservoir, il traverse d'abord une série de quatre flacons

Fig. 35.



laveurs soudés les uns aux autres. Les deux premiers contiennent de l'acide sulfurique, les deux suivants une solution concentrée de potasse caustique. De là, le gaz se rend dans un tube en U de 25^{mm} de diamètre et de $1^{m},60$ de longueur, rempli de potasse caus-

tique en morceaux, puis dans un second tube semblable contenant de l'acide phosphorique anhydre.

Le tube par lequel l'azote sec sort de l'appareil de desséchement se divise en trois branches : la première P conduit à une pompe à mercure sans robinet; la deuxième, à un flacon A, d'une capacité de 1^l, rempli de mercure et pouvant servir de réservoir au gaz sec; la troisième M aboutit, par le tube *d* (*Pl. I*), à la branche fermée du manomètre *n*, dans laquelle, pendant toutes les opérations préliminaires, on n'a pas laissé pénétrer le mercure. Des robinets placés sur chacune de ces branches permettent d'établir ou de supprimer toute communication entre elles. On a évité l'emploi de tuyaux de caoutchouc pour opérer ces nombreux raccordements; toutes les canalisations sont formées par des tubes de verre soudés les uns aux autres ou assemblés à l'aide de raccords rodés à l'émeri. On s'est assuré de leur parfaite étanchéité, en faisant à plusieurs reprises le vide dans tout l'appareil. Cette opération avait d'ailleurs pour but de chasser l'air contenu dans l'appareil et de le remplacer par l'azote.

Remplissage du réservoir. — Le réservoir thermométrique, après avoir été nettoyé et séché, fut mis en communication avec la pompe et évacué sept ou huit fois à moins de $0^{mm},1$ de pression, en laissant rentrer chaque fois l'azote qu'on venait de préparer.

Après avoir rempli le tube une dernière fois, on l'entoura de glace et, comprimant l'azote en versant du mercure dans le tube E qui communique avec le réservoir A, on lui donna une pression convenable, supérieure à la pression atmosphérique. On supprima alors la communication de la branche fermée du manomètre avec l'appareil de desséchement, et l'on fit monter le mercure dans cette branche jusqu'au-dessus du tube de jonction *d*, isolant ainsi un volume gazeux dont la pression à 0° était d'environ 1^m.

104. Exposé des mesures. — Les mesures sur l'azote, qui se sont étendues sur une période de dix mois (juin 1885 à mars 1886, avec une interruption de deux mois en automne) se divisent en deux groupes. Dans le premier, la température de la salle est restée voisine de 20°; dans le second, elle est descendue à 5°

environ. La légère incertitude qui régnait sur les éléments de réduction relatifs à l'espace nuisible engagea à faire, pour les deux groupes, des déterminations de la pression initiale complètement indépendantes, et à réduire, dans chacun des groupes, l'espace nuisible respectivement à 20° et à 5°.

Le premier groupe comprenait les comparaisons dans l'eau à 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45° et, dans les vapeurs de chloroforme et d'alcool éthylique, à 61° et 78°. Dans le second groupe d'expériences rentraient les comparaisons à — 24°, — 20°, — 15°, — 10°, — 6°, — 4°, + 2°,5, 5°, 10°, 15°, 20° et 25°, dans l'alcool ou dans l'eau.

Premier groupe. — Il a été fait, du 5 juin au 20 avril 1885, dix-neuf déterminations du zéro, espacées régulièrement sur tout cet intervalle de temps. Les résultats n'ont montré aucune marche systématique, d'où l'on conclut que la masse du gaz contenu dans l'appareil était parfaitement constante dans les limites des erreurs d'observation. Le résultat moyen de ces mesures est

$$H_0 = 995^{mm},942.$$

L'erreur probable d'une observation, déduite des écarts par rapport à la moyenne, est de $\pm 4^{\mu},5$.

Quatre déterminations du point 100, les 12, 15 et 17 juin et le 22 août, ont donné, comme coefficient moyen de dilatation entre 0° et 100°,

$$\alpha = 0,003\,674\,66.$$

Le Tableau suivant contient, à titre d'exemple, les résultats réduits des quatre séries à 15°. Les écarts que l'on remarque entre les thermomètres étalons montrent qu'il existait de légères différences systématiques de la température en divers points de l'auge.

			Pressions réduites $H_0 + h'$.	Températures. N° 4428.	N° 4429.	N° 4430.	N° 4431.	Moyenne générale t_0.
			mm	°	°	°	°	°
29	juin 1885.	Série I....	1049,379	14,787	14,794	14,784	14,778	14,786
29	»	Série II...	1049,438	790	808	804	812	804
30	»	Série III...	1049,790	901	903	898	901	901
30	»	Série IV...	1050,232	15,024	15,026	15,019	15,024	15,023

En introduisant ces valeurs dans la formule fondamentale (p. 236) avec celles des constantes données précédemment (p. 234), on trouve les températures suivantes T_{Az}, mesurées au thermomètre à azote, et leurs différences $T_{Az} - t_v$ par rapport aux thermomètres à mercure en verre dur.

	T_{Az}.	$T_{Az} - t_v$.
	°	°
Série I.....	14,727	— 0,059
Série II.....	743	— 0,061
Série III.....	840	— 0,061
Série IV.....	14,962	— 0,061

Second groupe. — Il a été fait, du 2 novembre 1885 au 9 février 1886, quatorze déterminations de la pression initiale, qui ont donné le résultat moyen

$$H_0 = 995^{mm},888,$$

l'espace nuisible étant réduit à 5°.

Pour atteindre les températures très basses, on entourait l'auge intérieure, remplie d'alcool, d'un mélange de neige, de sel de cuisine et de chlorure de calcium en proportions convenables. La préparation de l'expérience était longue et laborieuse. On profitait du passage par le minimum de température pour faire les observations.

105. Résultats. — Les résultats moyens, relatifs aux deux groupes d'expériences, sont les suivants :

PREMIER GROUPE.

T_{Az}.	t_v.	$T_{Az} - t_v$.
°	°	°
14,818	14,879	— 0,061
19,977	20,047	— 0,070
24,957	25,047	— 0,090
29,978	30,074	— 0,096
34,977	35,068	— 0,091
39,985	40,079	— 0,094
44,882	44,974	— 0,092
60,945	61,032	— 0,087
78,191	78,247	— 0,056

SECOND GROUPE.

T_{Az}.	t_v.	$T_{Az} - t_v$.
°	°	°
— 23,826	— 24,024	+ 0,198
— 19,465	— 19,613	+ 0,148
— 15,046	— 15,151	+ 0,105
— 10,458	— 10,522	+ 0,064
— 5,878	— 5,901	+ 0,023
— 3,959	— 3,981	+ 0,022
+ 2,387	+ 2,407	— 0,020
+ 4,826	+ 4,855	— 0,029
+ 9,909	+ 9,961	— 0,052
+ 14,802	+ 14,873	— 0,071
+ 19,902	+ 19,986	— 0,084
+ 24,984	+ 25,079	— 0,095

Discussion. — Le thermomètre à gaz et les thermomètres à mercure doivent, par définition, concorder à 0°. Or, par suite des erreurs constantes affectant les déterminations tout à fait indépendantes du zéro des thermomètres à azote et à mercure, la courbe continue, réunissant les points du second groupe, coupe l'axe des ordonnées à — 0°,007. Pour faire concorder le point de départ des deux échelles, M. Chappuis a calculé, par la méthode des moindres carrés, l'équation d'une courbe parabolique du troisième degré, satisfaisant le mieux possible aux coordonnées des douze points déterminés dans le second groupe d'expériences. Il en résulte, pour la pression initiale, une correction de $-0^{mm},0251$, ce qui la réduit à $H_0 = 995^{mm},863$.

En adoptant cette valeur de la pression initiale pour le second groupe d'expériences, on trouve les résultats suivants, qui doivent être substitués aux nombres donnés plus haut :

T_{Az}.	t_v.	$T_{Az} - t_v$.
°	°	°
— 23,820	— 24,024	+ 0,204
— 19,458	— 19,613	+ 0,155
— 15,040	— 15,151	+ 0,111
— 10,451	— 10,522	+ 0,071
— 5,871	— 5,901	+ 0,030
— 3,952	— 3,981	+ 0,029
+ 2,395	+ 2,407	— 0,012
+ 4,833	+ 4,855	— 0,022
+ 9,911	+ 9,961	— 0,045
+ 14,809	+ 14,873	— 0,064
+ 19,909	+ 19,986	— 0,077
+ 24,992	+ 25,079	— 0,087

La comparaison des résultats à 15°, 20°, 25°, trouvés dans les deux groupes d'expériences montre qu'il n'existe entre eux aucune différence systématique; on peut donc les réunir dans une même formule.

106. Représentation analytique des résultats. — Le problème relatif à la différence de marche entre un thermomètre à mercure et un thermomètre à gaz qui se présente le plus fréquemment est celui-ci :

Une température ayant été déterminée au moyen d'un thermomètre à mercure, trouver la correction qu'il faut appliquer à la lecture pour obtenir l'indication du thermomètre à gaz.

Mais il est des cas moins fréquents où le problème inverse doit être résolu; il faut donc calculer deux fonctions différentes représentant la différence de marche entre les thermomètres à mercure et à gaz : l'une a pour variable indépendante la température du thermomètre à mercure, l'autre la température du thermomètre à gaz.

Nous avons donné précédemment (p. 206) la forme générale de l'équation qui relie la différence de marche à la température [1]. Nous désignerons par a, b, c les coefficients de la formule relative aux thermomètres à mercure, par A, B, C ceux de la fonction de la température donnée par le thermomètre à gaz.

M. Chappuis, en réunissant dans une formule à trois para-

---

[1] La forme sous laquelle M. Chappuis a employé la formule est

$$T_{Az} - t_v = x(100 - t_v)\, t_v + y(100^2 - t_v^2)\, t_v + z(100^3 - t_v^3)\, t_v.$$

Les relations entre x, y, z et les coefficients de l'équation

$$T_{Az} - t_v = t_v(100 - t_v)(a + bt_v + t_v^2)$$

sont

$$a = x + 100y + 100^2 z, \qquad x = a - 100b,$$
$$b = y + 100z, \qquad y = b - 100c,$$
$$c = z; \qquad z = c.$$

Dans divers travaux personnels, nous avons calculé la différence dans le sens t — T; afin d'éviter toute ambiguïté, nous emploierons toujours, dans ce Traité, es constantes de la formule dans le sens inverse, adopté précédemment dans les ormules théoriques.

mètres les vingt et une valeurs de $T_{Az} - t_v$ données par l'expérience, a trouvé

$$a = -5,5541.10^{-5},$$
$$b = +4,8240.10^{-7},$$
$$c = -2,4807.10^{-9}.$$

Dans l'équation transformée, les valeurs des constantes sont (¹)

$$A = -5,5921.10^{-5},$$
$$B = +4,9616.10^{-7},$$
$$C = -2,5865.10^{-9}.$$

Les différences entre les quantités $T_{Az} - t_v$ observées et ces mêmes quantités calculées par la formule

$$T_{Az} - t_v = t_v(100 - t_v)(-55,541 + 0,482\,40\,t_v - 0,002\,480\,7\,t_v^2)\,10^{-6}$$

sont les suivantes :

t_v.	Obs.—Calc.	t_v.	Obs.—Calc.	t_v	Obs.—Calc.
°	°	°	°	°	°
—24,0	—0,0002	4,9	+0,0025	25,0	—0,0025
—19,6	+0,0003	10,0	+0,0008	30,5	—0,0050
—15,1	+0,0003	14,9	—0,0020	35,0	+0,0038
—10,5	+0,0002	14,8	+0,0010	40,0	+0,0025
— 5,9	—0,0065	20,0	—0,0020	44,9	+0,0041
— 4,0	+0,0051	20,0	+0,0050	60,9	—0,0030
+ 2,4	+0,0008	25,1	—0,0055	78,2	+0,0001

La répartition des erreurs résiduelles montre qu'une formule à trois constantes suffit pour rassembler les résultats.

L'erreur probable d'une observation est, d'après le Tableau ci-dessus,

$$r = \pm 0,0023 \text{ degré.}$$

L'erreur probable de la fonction s'annule par définition à 0° et à 100°; elle atteint ± 0,0018 degré à — 24° et vers + 80°.

La Table IX donne les résultats de l'interpolation pour tous les degrés.

(¹) Ch.-Ed. Guillaume, *Formules pratiques pour la transformation des coefficients thermiques* (*T. et M.*, t. VI, p. 10; 1888).

THERMOMÈTRE A ACIDE CARBONIQUE.

107. Modifications apportées aux appareils. — Les expériences faites avec le thermomètre à azote avaient montré l'opportunité de diverses modifications qui furent apportées aux appareils avant que l'on procédât aux mesures sur l'acide carbonique. On établit d'abord, dans l'auge extérieure, un tube de cuivre rouge dans lequel circulait la vapeur d'eau développée dans une chaudière; celle-ci était en communication avec un grand réservoir où l'on pouvait faire un vide partiel et obtenir ainsi une température d'ébullition quelconque inférieure à 100°. En protégeant suffisamment l'auge et en vérifiant fréquemment la pression dans l'appareil au moyen d'un manomètre, on arrivait ainsi à maintenir une température très constante.

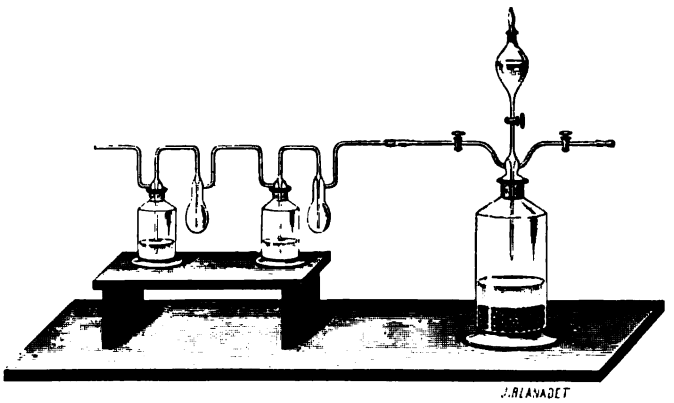
Le manomètre fut démonté et nettoyé, et l'espace nuisible jaugé de nouveau. En outre, un tronçon du tube capillaire de 15^{cm} fut entouré d'un manchon, de façon à participer aux variations de température du réservoir.

L'espace nuisible, jusqu'à l'extrémité de la pointe, devint ainsi égal à $1^{ml},0500$, et le volume du réservoir à 0° fut porté à $1^{l},039050$.

108. Préparation du gaz et remplissage du réservoir. — On remplaça la potasse dans le tube en U par de l'acide phosphorique anhydre. La solution concentrée de potasse, contenue dans la série de flacons laveurs et dans le réservoir de quatre litres R (*fig.* 35), fut également remplacée par de l'acide sulfurique concentré. L'acide carbonique était préparé par la décomposition du bicarbonate de soude au moyen de l'acide sulfurique. Le bicarbonate de soude, employé à cet effet, avait été purifié par le procédé suivant : 500^{g} environ de bicarbonate, déjà assez pur, furent chauffés pendant quelques heures à une température élevée, de façon à transformer ce corps en carbonate. Cette décomposition achevée, on fit dissoudre le résidu dans l'eau distillée, et l'on fit passer à travers la solution un courant d'acide carbonique qui reconstitua le bicarbonate de soude. Ce dernier, moins soluble que le carbonate, se déposa en cristaux très fins que l'on put recueillir sur un filtre et laver à l'eau distillée.

Le sel ainsi préparé, fortement trempé d'eau, fut introduit dans une bouteille d'un litre de capacité, représentée dans la *fig.* 36. Le bouchon rodé de cette bouteille est traversé par un tube effilé par le bas et se termine en haut par un réservoir de

Fig. 36.



20$^{cm^3}$ environ de capacité, destiné à contenir l'acide sulfurique dilué. Un robinet placé au-dessous permet de régler l'écoulement de l'acide sulfurique.

Deux tubes d'accès, soudés au bouchon et munis de robinets, relient le flacon, d'une part, au réservoir du gaz et à l'appareil de desséchement, d'autre part, à une trompe à eau.

Avant de dégager le gaz, en laissant pénétrer l'acide sulfurique, il convient de chasser complètement l'air renfermé dans l'appareil. On y parvient aisément en faisant bouillir, sous le vide de la trompe à eau, la solution concentrée de bicarbonate, qu'on a préalablement chauffée. Le vide ayant été également fait dans les appareils de desséchement et dans l'espace libre du réservoir R, on les met en communication avec l'appareil de dégagement. L'acide carbonique développé dans la bouteille traverse alors deux flacons laveurs contenant l'eau distillée, et se rend dans le réservoir R, refoulant peu à peu l'acide sulfurique dans le vase inférieur R′.

Comme les tubes de desséchement pouvaient encore renfermer quelques traces d'air, on a utilisé les dix premiers litres de l'acide

carbonique ainsi préparé à les expulser en faisant alternativement le vide dans l'appareil et en laissant rentrer l'acide carbonique.

Le réservoir thermométrique fut rempli avec les mêmes soins que dans le cas de l'azote.

109. Exposé des mesures. — Le thermomètre à acide carbonique était exclu d'avance de la discussion sur l'échelle normale; les expériences de M. Chappuis étaient destinées seulement à fournir quelques données précises sur la dilatation de ce gaz fréquemment étudié; elles sont moins complètes que les autres.

Les mesures relatives à l'acide carbonique ont été faites sous deux pressions initiales sensiblement différentes. M. Chappuis désigne le thermomètre, dans les deux séries de mesures, par *thermomètre à acide carbonique n° 1 et n° 2.*

Thermomètre à acide carbonique n° 1. — La pression initiale fut déterminée douze fois, du 17 septembre au 15 novembre 1886. Une légère diminution de la pression initiale ayant été constatée, on admit, pour toute la durée des observations, la valeur

$$H_0 = 995^{mm},190 - 0^{mm},000\,604\,n,$$

n désignant le nombre de jours écoulés depuis le 17 septembre.

Le coefficient moyen de dilatation, déduit de quatre déterminations du point 100, est

$$\alpha = 0,003\,724\,77.$$

Les comparaisons donnèrent les résultats suivants :

T_{CO^2}.	t_v.	$T_{CO^2} - t_v$.
$-$ 17°,410	$-$ 17°,492	$+$ 0°,082
$-$ 10,482	$-$ 10,530	$+$ 0,048
$+$ 9,862	$+$ 9,893	$-$ 0,031
$+$ 19,976	$+$ 20,016	$-$ 0,040
$+$ 30,030	$+$ 30,076	$-$ 0,046
$+$ 39,987	$+$ 40,035	$-$ 0,048

Thermomètre à acide carbonique n° 2. — La pression initiale, parfaitement constante pendant les expériences, fut déterminée dix fois, du 17 novembre au 7 décembre 1886. Le point 100

fut déterminé cinq fois. Il en résulte

$$H_0 = 870^{mm},279,$$
$$\alpha = 0,003\,716\,34.$$

Les comparaisons ont donné

T_{CO^2}.	t_v.	$T_{CO^2} - t_v$.
0	0	0
19,999	20,040	— 0,041
40,130	40,180	— 0,050
60,009	60,046	— 0,037

Constantes de la formule. — Les valeurs de la différence $T_{CO^2} - t_v$ étant sensiblement les mêmes à 20° et 40° pour les thermomètres n° 1 et n° 2, tous les résultats ont été réunis dans une même formule dont les constantes sont

$$a = -3,3386.10^{-5},$$
$$b = +3,9910.10^{-7},$$
$$c = -1,6678.10^{-9}.$$

Les erreurs probables sont de même ordre que dans le cas de l'azote.

THERMOMÈTRE A HYDROGÈNE.

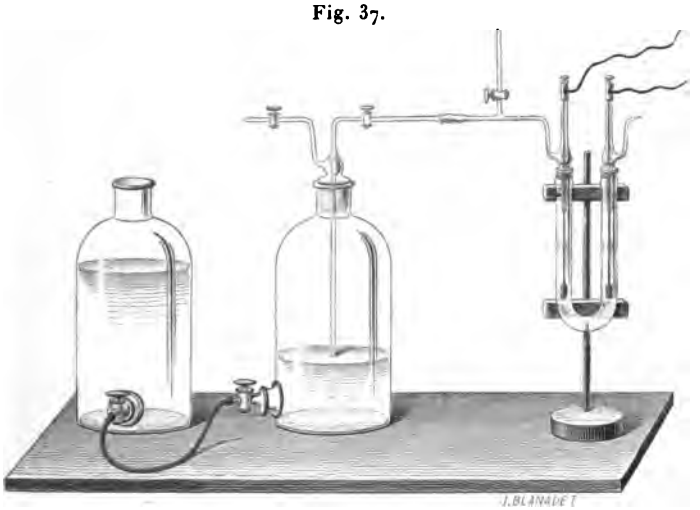
110. Préparation du gaz. — L'hydrogène a été préparé par l'électrolyse d'une solution à 45 pour 100 d'acide orthophosphorique dans de l'eau distillée. Le voltamètre (*fig.* 37) était constitué par un tube en U de 2^{cm} de diamètre, dont les branches étaient fermées par des bouchons de verre rodés, qui livraient passage aux électrodes de platine.

Le gaz dégagé s'échappait par un tube latéral soudé au bouchon; l'hydrogène était recueilli dans une grande bouteille contenant de l'eau distillée privée d'air. Une seconde bouteille, reliée à la première par un tuyau de caoutchouc, recevait l'eau remplacée par l'hydrogène.

Le courant employé était d'environ $1^{amp},5$. Le gaz passait dans un tube rempli de cuivre divisé, chauffé au rouge sombre, afin

de détruire l'hydrogène phosphoré qui aurait pu se former. Les flacons contenant de l'acide sulfurique avaient été remplacés par

Fig. 37.



un tube en U rempli d'acide phosphorique.

111. Exposé des mesures. — Les mesures effectuées sur l'hydrogène se divisent en deux groupes. Dans les expériences du premier groupe (du 22 janvier au 24 mars 1887), qui comprennent trente déterminations indépendantes de la pression initiale, cinq déterminations du point 100 et les séries de comparaisons à douze températures comprises entre — 25° et + 35°, on a réduit l'espace nuisible à la température moyenne de 5°. Dans le deuxième groupe (du 20 avril au 28 mai), constitué par seize déterminations de la pression initiale, deux déterminations du point 100 et par les comparaisons effectuées à neuf températures comprises entre 20° et 78°, l'espace nuisible a été réduit à la température de 15°.

La pression initiale montra deux diminutions brusques, correspondant à deux déterminations du point 100; les déterminations antérieures à la première diminution ne furent pas prises en considération.

On a admis, du 26 au 31 janvier,

$$H_0 = 998^{mm},966,$$

et, du 2 février au 24 mars,

$$H_0 = 998^{mm},939;$$

entre ces dates, la pression ne montra aucune variation systématique.

Pour le second groupe, la pression demeura parfaitement constante. La valeur moyenne de la pression initiale est

$$H_0 = 998^{mm},967.$$

Les sept déterminations du point 100 ont donné, pour la dilatation moyenne de l'hydrogène entre 0° et 100°,

$$\alpha = 0,003\,662\,54.$$

Résultats des comparaisons. — En formant les moyennes des différences $T_H - t_v$ trouvées par les quatre séries d'observations effectuées à une même température, on obtient le résumé suivant :

T_H.	t_v.	$T_H - t_v$.
°	°	°
— 24,091	— 24,312	+ 0,221
— 19,018	— 19,186	+ 0,168
— 14,757	— 14,875	+ 0,118
— 10,333	— 10,410	+ 0,077
— 5,462	— 5,503	+ 0,041
+ 4,828	+ 4,856	— 0,028
+ 10,008	+ 10,059	— 0,051
+ 15,034	+ 15,100	— 0,066
+ 19,847	+ 19,932	— 0,085
+ 19,983	+ 20,066	— 0,083
+ 24,953	+ 25,047	— 0,094
+ 25,052	+ 25,147	— 0,095
+ 30,031	+ 30,131	— 0,100
+ 30,037	+ 30,141	— 0,104
+ 34,827	+ 34,930	— 0,103
+ 34,985	+ 35,094	— 0,109
+ 40,004	+ 40,116	— 0,112
+ 44,928	+ 45,037	— 0,109
+ 49,756	+ 49,860	— 0,104
+ 60,176	+ 60,260	— 0,084
+ 77,841	+ 77,898	— 0,057

Constantes de la formule. — La courbe continue passant le

plus près possible des points dont l'abscisse est t_v et l'ordonnée $T_H - t_v$ coupe l'axe des ordonnées très près de l'origine; la condition de concordance à 0° est donc satisfaisante.

En calculant comme précédemment, on trouve, pour les constantes de la formule représentant la quantité $T_H - t_v$ en fonction des thermomètres à mercure et à hydrogène,

$$a = -6,1859.10^{-5}, \qquad A = -6,2296.10^{-5},$$
$$b = +4,7351.10^{-7}, \qquad B = +4,8946.10^{-7},$$
$$c = -1,1577.10^{-9}. \qquad C = -1,2805.10^{-9},$$

avec les erreurs résiduelles suivantes :

t_v.	Obs. — Calc.	t_v.	Obs. — Calc.	t_v.	Obs — Calc.
°	°	°	°	°	°
−24,3	−0,0028	15,1	+0,0045	34,9	+0,0032
−19,2	+0,0048	19,9	−0,0006	35,1	−0,0027
−14,8	−0,0002	20,1	+0,0017	40,1	−0,0045
−10,4	+0,0001	25,0	+0,0012	45,0	−0,0029
− 5,5	+0,0036	25,1	+0,0004	49,9	−0,0012
+ 4,9	−0,0005	30,1	+0,0024	60,3	+0,0059
+10,1	+0,0013	30,1	−0,0016	77,9	−0,0019

L'erreur probable d'une observation est ± 0,0020 degré, et celle de la fonction atteint ± 0,0016 degré à — 25° et à + 80°.

Les valeurs de la fonction $T_H - t_v$ pour tous les degrés sont données dans la Table X.

SYNTHÈSE ET DÉVELOPPEMENTS.

112. Comparaison des résultats relatifs aux thermomètres à azote, à acide carbonique et à hydrogène. — Les recherches dont nous venons de donner un résumé montrent que, entre 0° et 100°, les thermomètres en verre dur donnent des indications plus élevées que les échelles fournies par la variation de tension de l'azote, de l'acide carbonique et de l'hydrogène. Le contraire a lieu au-dessous de 0° et sans doute au-dessus de 100°.

L'écart maximum, entre 0° et 100°, est

De 0,049 degré vers 35° pour l'acide carbonique.
0,097 » » 40° » l'azote.
0,107 » » 40° » l'hydrogène.

Rapportés à la plus basse des trois échelles, celle de l'hydrogène, les résultats sont les suivants :

T_H.	$T_{Az} - T_H$.	Erreur probable.	$T_{CO^2} - T_H$.	Erreur probable.
— 25°	— 0,016	± 0,003	— 0,094	± 0,003
— 20	— 0,014	∓ 0,002	— 0,071	± 0,002
— 15	— 0,010	± 0,001	— 0,051	± 0,002
— 10	— 0,007	± 0,001	— 0,032	± 0,001
— 5	— 0,004	± 0,000	— 0,015	± 0,000
0	0,000		0,000	
+ 5	+ 0,003	± 0,000	+ 0,013	± 0,000
+ 10	+ 0,006	± 0,000	+ 0,025	± 0,001
+ 15	+ 0,008	± 0,001	+ 0,035	± 0,001
+ 20	+ 0,010	± 0,001	+ 0,043	± 0,001
+ 25	+ 0,011	± 0,001	+ 0,050	± 0,001
+ 30	+ 0,011	± 0,001	+ 0,054	± 0,001
+ 35	+ 0,011	± 0,001	+ 0,057	± 0,001
+ 40	+ 0,011	± 0,001	+ 0,059	± 0,001
+ 45	+ 0,010	± 0,001	+ 0,060	± 0,001
+ 50	+ 0,009	± 0,001	+ 0,059	± 0,001
+ 55	+ 0,007	± 0,001	+ 0,057	± 0,002
+ 60	+ 0,005	± 0,002	+ 0,053	± 0,002
+ 65	+ 0,003	± 0,002	+ 0,049	± 0,003
+ 70	+ 0,001	± 0,002	+ 0,044	± 0,003
+ 75	— 0,001	± 0,002	+ 0,038	± 0,003
+ 80	— 0,002	± 0,002	+ 0,031	± 0,003
+ 85	— 0,003	± 0,002	+ 0,024	± 0,003
+ 90	— 0,003	± 0,002	+ 0,016	± 0,003
+ 95	— 0,002	± 0,001	+ 0,008	± 0,002
+100	0,000		0,000	

Les valeurs négatives de $T_{Az} - T_H$ entre 75° et 100° sont dues sans doute à des erreurs d'expérience parfaitement admissibles, si l'on remarque qu'il a été fait une seule comparaison dans cet intervalle. Une erreur de $0^{mm},01$ environ dans la mesure de la tension d'un des gaz à 100° suffirait aussi pour l'expliquer. Dans le cas de comparaisons directes entre les thermomètres à azote et à hydrogène, il y aurait probablement eu lieu d'appliquer à la formule théorique la correction indiquée à la page 209.

113. Échelle normale. — A la suite des expériences de M. Chappuis, le Comité international des Poids et Mesures dis-

cuta la question de l'adoption d'une échelle thermométrique normale. Comme il a été dit plus haut, l'acide carbonique était en quelque sorte exclu d'avance.

Le thermomètre à azote avait surtout une importance historique, ses indications étant certainement très voisines de celles du thermomètre à air par rapport auquel de nombreuses constantes ont été déterminées (1). Cependant, il y a fort peu de déterminations anciennes, pour ne pas dire aucune, dans lesquelles la précision atteigne les plus fortes divergences entre les thermomètres à azote et à hydrogène.

D'autre part, il est certain que, de tous les gaz, l'hydrogène est celui qui s'approche le plus de l'état parfait que suppose la définition de la température par la dilatation d'un gaz. Tous les calculs faits jusqu'ici attribuent au thermomètre à air une légère avance sur l'échelle absolue entre 0° et 100°; le thermomètre à hydrogène, très peu en retard sur ce dernier, est donc, selon toute probabilité, plus voisin de l'échelle absolue. Enfin l'hydrogène reste gazeux bien au-dessous des températures où l'oxygène et l'azote se liquéfient.

Guidé par ces considérations, le Comité international des Poids et Mesures prit, dans sa séance du 15 octobre 1887, la résolution suivante :

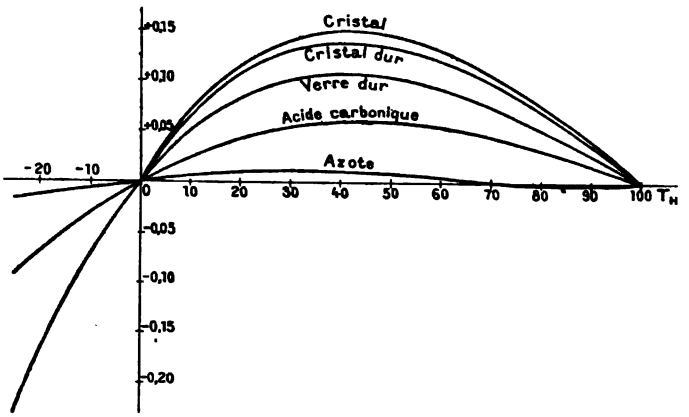
Le Comité international des Poids et Mesures adopte, comme ÉCHELLE THERMOMÉTRIQUE NORMALE *pour le Service international des Poids et Mesures, l'échelle centigrade du* THERMOMÈTRE A HYDROGÈNE *ayant pour points fixes la température de la glace fondante* (0°) *et celle de la vapeur d'eau distillée en ébullition* (100°) *sous la pression atmosphérique normale; l'hydrogène étant pris sous la pression manométrique initiale de* 1^m *de mercure, c'est-à-dire à* $\frac{1000}{760} = 1,3158$ *de la pression atmosphérique normale.*

---

(1) Il est presque certain que les indications du thermomètre à air s'écartent légèrement de celles du thermomètre à azote dans le sens de celles du thermomètre à acide carbonique, car l'oxygène est un gaz moins parfait que l'azote. La plus forte divergence entre 0° et 100° ne dépasse sans doute pas quelques millièmes de degré.

Le diagramme suivant (*fig.* 38) représente la marche de divers thermomètres par rapport à l'échelle normale.

Fig. 38.



114. Écarts entre l'échelle normale et l'échelle absolue ou thermodynamique. — Les différences trouvées directement entre les divers thermomètres à gaz (p. 258) sont incomparablement plus sûres que toutes les données déduites des calculs théoriques mentionnés précédemment. Par rapport à ces dernières, nous pouvons les considérer comme absolument exactes. En supposant, de plus, que les thermomètres à air et à azote concordent, nous pouvons calculer les divergences probables entre l'échelle normale et l'échelle absolue.

En combinant les nombres consignés dans les Tableaux du n° 95 avec les nombres du n° 112, on trouve les résultats qui suivent :

EXCÈS DU THERMOMÈTRE A HYDROGÈNE SUR L'ÉCHELLE ABSOLUE.

a. D'après le thermomètre à air.

T.	D'APRÈS JOCHMANN.		D'APRÈS WEINSTEIN.		D'APRÈS THOMSON et JOULE.
	Première série.	Moyenne.	Première série.	Moyenne.	
0°	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	— 0,004	— 0,006	0,000	+ 0,001	
20	— 0,007	— 0,010	0,000	+ 0,003	+ 0,020
30	— 0,008	— 0,010	+ 0,002	+ 0,005	
40	— 0,007	— 0,010	+ 0,003	+ 0,007	+ 0,029
50	— 0,005	— 0,008	+ 0,006	+ 0,010	
60	— 0,001	— 0,004	+ 0,009	+ 0,013	+ 0,031
70	+ 0,002	0,000	+ 0,012	+ 0,014	
80	+ 0,005	+ 0,002	+ 0,011	+ 0,014	+ 0,024
90	+ 0,005	+ 0,003	+ 0,008	+ 0,009	
100	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

b. D'après le thermomètre à acide carbonique.

T.	D'APRÈS JOCHMANN.		D'APRÈS WEINSTEIN.
	c_p Regnault.	c_p Wiedemann.	
0°	0,000	0,000	0,000
10	— 0,010	— 0,007	— 0,005
20	— 0,017	— 0,012	— 0,009
30	— 0,020	— 0,014	— 0,009
40	— 0,019	— 0,013	— 0,008
50	— 0,018	— 0,012	— 0,006
60	— 0,014	— 0,008	— 0,003
70	— 0,011	— 0,005	— 0,001
80	— 0,006	— 0,002	+ 0,001
90	— 0,003	0,000	+ 0,002
100	0,000	0,000	0,000

D'après les résultats de M. Weinstein, qui, comme nous l'avons dit, sont les plus probables, les indications du thermomètre à hydrogène s'écarteraient de l'échelle absolue, entre 0° et 70°, dans un sens ou dans l'autre, suivant que les écarts sont calculés au moyen du thermomètre à air ou du thermomètre à acide carbonique. Des écarts plus forts dans le voisinage de 100° sont incompatibles avec les propriétés des gaz. On en conclut que, entre 0° et 100°, les différences entre l'échelle normale et l'échelle absolue sont trop petites pour que leur signe même puisse être déduit d'une manière certaine des expériences faites jusqu'ici.

115. Limite d'emploi du thermomètre à hydrogène. — La concordance entre l'échelle du thermomètre à hydrogène et l'échelle absolue ne subsiste évidemment que dans les limites entre lesquelles ce gaz jouit des propriétés qui caractérisent un gaz parfait; cette concordance cesse aux températures très basses, un peu avant que l'hydrogène passe à l'état liquide.

On ne possède, pour le moment, aucun moyen rigoureux de déterminer l'erreur du thermomètre à hydrogène dans les régions où ses indications peuvent être suspectées. Il faut avoir recours, pour cette recherche, à des moyens détournés qui ne permettent que des conclusions *probables*.

Deux méthodes complètement différentes peuvent être suivies : la première consiste à conclure par analogie, en examinant la dilatation d'autres gaz dans le voisinage de leur température critique; la seconde est basée sur une comparaison du thermomètre à hydrogène avec des échelles au moyen desquelles l'extrapolation présente un certain degré de probabilité.

Première méthode : Expériences de M. Olzewski. — Au cours de ses recherches sur la liquéfaction des gaz, M. Olzewski [1] a comparé incidemment des thermomètres à azote, à oxygène et à bioxyde d'azote à un thermomètre à hydrogène. Les températures critiques de ces trois premiers gaz sont respectivement, d'après M. Olzewski, — 146°, — 118°,8 et — 93°,5; leurs

---

[1] Olzewski, *Ueber die Dichte des flüssigen Methans, sowie des verflüssigten Sauerstoffs und Stickstoffs* (*Wied. Ann.*, t. XXXI, p. 58; 1887).

températures d'ébullition sous la pression atmosphérique sont — 194°,4, — 181°,4 et — 153°,6. Les comparaisons ont donné les résultats suivants :

Températures du thermomètre à

Hydrogène T_H.	Azote T_{Az}.	$T_{Az} - T_H$.	Oxygène T_O.	$T_O - T_H$.
— 32°,5	— 33°,0	—0°,5 (1)	— 33°,3	—0°,8 (1)
—102,5	—103,0	—0,5	103,5	—1,0
—118,6	—119,1	—0,5	—119,9	—1,3
—143,7	—144,4	—0,7	—145,5	—1,8
—151,0	—152,0	—1,0	—153,1	—2,1

Hydrogène T_H.	Bioxyde d'azote T_{AzO}.	$T_{AzO} - T_H$.
— 102°,3	— 102°,8	— 0°,5
— 116,4	— 117,7	— 1,3
— 129,3	— 131,0	— 1,7
— 146,8	— 148,7	— 1,9

On voit qu'à des températures de beaucoup inférieures à la température critique, les indications fournies par les trois thermomètres susnommés ne diffèrent de celles du thermomètre à hydrogène que de 1 à 2 degrés. Or, comme l'hydrogène n'a pas pu être liquéfié sous une forte pression à une température de — 220°, on peut en conclure que sa température critique est encore plus basse; si donc les indications du thermomètre à hydrogène sont sensiblement exactes à — 150°, elles ne doivent différer des températures absolues que d'une petite quantité vers — 220°.

Seconde méthode. — Supposons que nous ayons mesuré une variation thermique quelconque dont la valeur ait été rapportée au thermomètre à hydrogène. Nous pouvons en déduire (86) les coefficients de la formule qui sert à ramener à l'échelle normale les indications thermométriques de la variation considérée. Rigoureusement, cette formule ne devrait servir qu'à l'interpolation, mais on peut l'employer, avec un certain degré de probabilité, au delà des limites des expériences.

(1) D'après les expériences beaucoup plus précises de M. Chappuis, cette différence est certainement trop grande.

Pour une distance donnée d'un des points extrêmes des mesures de graduation, l'incertitude de l'extrapolation dépend de la continuité du phénomène choisi, de la validité de la formule empirique employée pour le représenter, des limites entre lesquelles il a été étudié et enfin de la précision de cette étude.

Les conditions auxquelles le phénomène et son étude doivent satisfaire sont les suivantes :

La variation thermique considérée doit être continue et se rapprocher autant que possible de la forme linéaire; elle doit être étudiée sur un espace très étendu, en un grand nombre de points, de telle manière que l'on puisse contrôler, par les erreurs résiduelles, la précision des mesures et la suffisance de la formule choisie.

Si ces conditions sont remplies, on peut employer, pour l'extrapolation, une formule à un petit nombre de termes, présentant une sécurité beaucoup plus grande qu'une fonction contenant des puissances élevées de la température; on peut, de plus, calculer l'erreur probable de la fonction pour tous les points extrapolés.

A une grande distance des limites de la graduation, l'extrapolation devient nécessairement assez incertaine; mais on a la ressource d'employer un grand nombre de phénomènes de diverses natures, qui se contrôlent mutuellement, et dont les écarts par rapport à la moyenne permettent de conclure, d'une manière plus certaine que les erreurs probables individuelles, à l'erreur probable de cette moyenne. Dans la formation de la moyenne, on devra, du reste, donner à chaque phénomène d'autant plus de poids qu'il fournit une extrapolation plus probable.

On voit immédiatement qu'il faut éviter d'employer, pour cette extrapolation, des corps qui changent d'état dans l'intervalle de température des mesures; on choisira donc des corps dont le point de fusion est plus élevé que la température supérieure de la graduation.

Aucune recherche n'a été faite jusqu'ici d'après le plan exact qui vient d'être exposé. Nous rendrons compte de celles qui s'en rapprochent le plus.

Expériences de MM. Cailletet et Colardeau. — Les expé-

riences les plus complètes dans ce domaine ont été faites en 1888 par MM. Cailletet et Colardeau (1). Ils comparèrent le thermomètre à hydrogène à la résistance électrique du platine et aux couples thermo-électriques platine pur-platine rhodié et fer-cuivre; enfin ils mesurèrent la température par la méthode calorimétrique au moyen d'un lingot de platine. Les fonctions représentant ces divers phénomènes furent déterminées par des comparaisons à 100°, 0° et — 23°,4; on adopta, pour l'extrapolation, des formules du second degré; pour la chaleur spécifique du platine, la formule de M. Violle fut admise sans nouvelles expériences.

Des comparaisons faites à — 102°,4 montrèrent une concordance parfaite entre le thermomètre à hydrogène et la moyenne des indications thermométriques déduites des phénomènes étudiés. Les écarts individuels ne dépassaient pas un demi-degré.

Expériences de Wroblewski. — Déjà, en 1885, Wroblewski (2) avait entrepris incidemment des expériences à la suite desquelles il avait déclaré que le thermomètre à hydrogène s'écarte fortement de l'échelle absolue dans le voisinage de — 200°. Cette conclusion était basée sur des comparaisons avec le couple maillechort-cuivre, gradué par des expériences préliminaires dans le voisinage de + 99°, 0°, — 103° et — 131°. Les températures extrapolées furent calculées par une fonction du troisième degré de la force électromotrice du couple.

Wroblewski employa plus tard le couple en question à la mesure des températures dans diverses recherches, entre autres dans la détermination de la résistance électrique du cuivre avec la température; il trouva que le coefficient de variation, assez constant jusqu'à — 193°, augmente subitement au-dessous (3).

---

(1) CAILLETET et COLARDEAU, *Mesure des basses températures* (*Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, p. 286; juillet 1888).

(2) S. VON WROBLEWSKI, *Ueber den Gebrauch des siedenden Sauerstoffs, Stickstoffs und Kohlenoxyds, sowie der atmosphärischen Luft als Kältemittel* (*Wied. Ann.*, t. XXV, p. 371; 1885). Les différents travaux de Wroblewski ont été résumés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

(3) WROBLEWSKI, *Ueber den electrischen Widerstand des Kupfers bei den höchsten Kältegraden* (*Wied. Ann.*, t. XXVI, p. 27; 1885).

Or il est évident que les expériences de Wroblewski admettent une interprétation plus rationnelle. D'abord, la fonction qu'il a adoptée pour l'extrapolation au moyen du couple thermo-électrique a une forme différente de celle qui est prévue par la théorie, puisque l'on admet généralement que, l'une des soudures étant à une température constante, la force électromotrice du couple varie suivant une fonction du second degré de la température de l'autre soudure. De plus, dans ce cas particulier, la parabole qui représente cette fonction se rapproche de son sommet lorsque la température baisse, de telle sorte que l'extrapolation est très incertaine. Enfin, d'après tout ce que l'on sait sur les résistances électriques, leurs variations sont beaucoup plus régulières que celles des forces thermo-électromotrices, et se rapprochent beaucoup plus de la forme linéaire.

On est donc conduit à rejeter l'extrapolation par le couple maillechort-cuivre et à conserver de préférence celle qui est fournie par la résistance électrique du cuivre.

En admettant que la fonction parabolique déterminée par des expériences à $+100^\circ$, $+23^\circ$, 0°, -103° et -146° est encore exacte vers -200°, on trouve que la température évaluée par Wroblewski à -200° était de -211°. Or diverses températures d'ébullition déterminées dans cette région par Wroblewski au moyen du couple furent trouvées, par M. Olzewski, de 8 à 10 degrés plus basses au moyen du thermomètre à hydrogène, d'où l'on conclut que les températures indiquées par le thermomètre à hydrogène et extrapolées au moyen de la résistance du cuivre concordent à 2 ou 3 degrés près à -210°. La conclusion la plus probable que l'on puisse tirer des expériences de Wroblewski est donc que les indications du thermomètre à hydrogène sont sensiblement exactes dans le voisinage de -200° [1].

116. Conséquences relatives à la dilatation des gaz et des autres corps thermométriques. — Il semble démontré que, dans tout l'intervalle de température exploré jusqu'ici, l'échelle thermométrique fournie par la variation de tension de l'hydro-

---

[1] *Voir*, sur cette question, GUILLAUME, *Sur la mesure des températures très basses* (*Arch. de Gen.*, 3e série, t. XX, p. 396; 1888).

gène concorde avec l'échelle thermodynamique dans les limites des erreurs d'observation, c'est-à-dire à moins de 0,01 degré près aux températures ordinaires et à 2 ou 3 degrés près un peu au-dessous de — 200°. Les fonctions représentant les variations thermiques par rapport à l'échelle normale peuvent donc être considérées, dans l'état actuel des mesures, comme les véritables fonctions naturelles qui conviennent à ces phénomènes.

Les expériences de M. Chappuis permettent d'établir plusieurs de ces fonctions.

Dilatation de l'azote et de l'acide carbonique. — En admettant qu'une fonction parabolique du quatrième degré suffise pour représenter la dilatation de l'azote et de l'acide carbonique, entre — 25° et 100°, les formules (12) du n° 86, combinées avec les résultats trouvés par M. Chappuis, peuvent servir à calculer les coefficients de cette fonction. Il suffit d'introduire, dans ces formules, la valeur de la dilatation totale du gaz entre 0° et 100°, c'est-à-dire $\frac{E_{100} - E_0}{E_0}$, et celles des coefficients A, B, C des fonctions représentant la différence de marche entre le thermomètre à hydrogène et les deux autres thermomètres considérés ($T_H - T_{Az}$ et $T_H - T_{CO^2}$).

La dilatation moyenne de l'azote, entre 0° et 100°, sous la pression initiale de 1^m de mercure, est égale à 0,367 466. Les coefficients de la fonction représentant la différence $T_H - T_{Az}$ sont (¹) :

$$A = -6{,}374.10^{-6},$$
$$B = -6{,}700.10^{-9},$$
$$C = +1{,}306.10^{-9}.$$

On en déduit, pour la dilatation de l'azote, sous la pression de 1^m de mercure à 0°, les coefficients suivants :

$$\alpha = +0{,}003\,677\,00,$$
$$\beta = -2{,}096.10^{-8},$$
$$\gamma = -5{,}045.10^{-10},$$
$$\delta = +4{,}800.10^{-12}.$$

(¹) Nous avons adopté ici les différences entre les coefficients représentant la correction des thermomètres à mercure par rapport aux thermomètres à azote et à hydrogène en fonction de ces derniers. Pour l'acide carbonique, nous avons

On trouve de même, pour la dilatation de l'acide carbonique dans les mêmes conditions,

$$\alpha = + \ 0{,}003\,735\,38,$$
$$\beta = - \ 13{,}377.10^{-8},$$
$$\gamma = + \ 0{,}872.10^{-10},$$
$$\delta = + \ 1{,}900.10^{-12}.$$

Dilatation du mercure et du verre. — La méthode suivie précédemment (93) peut nous fournir de nouvelles relations entre la dilatation du mercure et du verre.

Nous avions trouvé que la correction de Poggendorff pour le verre dur est donnée par la formule

$$\psi_v = T(100 - T)(23{,}920 + 0{,}0240\,T)\,10^{-6}.$$

En combinant cette valeur avec celle de la correction totale $\varphi' - \psi$ des thermomètres en verre dur par rapport à l'échelle normale, nous trouvons successivement

$$T_H - t_v = \varphi' - \psi = T(100 - T)(-62{,}296 + 0{,}4895\,T - 0{,}00128\,T^2)\,10^{-6},$$
$$\varphi' = T(100 - T)(-38{,}376 + 0{,}5135\,T - 0{,}00128\,T^2)\,10^{-6}.$$

Les formules du n° 89 nous donnent

$$A'_{1v} = \frac{(n' - N_v) + 100(p' - P_v) + \ldots}{(m' - M_v) + 100(n' - N_v) + \ldots} = -38{,}376 \ .10^{-6},$$

$$B'_{1v} = \frac{(p' - P_v) + 100(q' - Q_v)}{(m' - M_v) + 100(n' - N_v) + \ldots} = + \ 0{,}5135 \ .10^{-6},$$

$$C'_{1v} = \frac{q' - Q_v}{(m' - M_v) + 100(n' - N_v) + \ldots} = - \ 0{,}00128.10^{-6},$$

Les deux dernières de ces formules nous montrent que les troisièmes et quatrièmes puissances de la température existent encore pratiquement dans le développement des séries représentant la dilatation du mercure et du verre. Mais ces quantités sont trop petites pour pouvoir être déterminées directement.

Les termes en T^3 et T^4 contribuent pour une large part à la

---

conservé les coefficients donnés en fonction des thermomètres à mercure, parce que, dans ce cas, la transformation de la formule n'aurait pas modifié sensiblement le résultat.

formation de la différence $T_H - t_\nu$; si, par conséquent, nous voulons employer les relations déduites de la théorie du thermomètre pour le calcul du terme en T^2 dans la dilatation du mercure et du verre, il faut d'abord ramener la formule exprimant la correction de t_ν à une fonction qui ne contienne plus qu'une constante. L'équation de cette forme qui concorde le mieux avec la relation ci-dessus est

$$T_H - t_\nu = \varphi' - \psi = -39{,}0\,T(100 - T)\,10^{-6}.$$

Les différences entre la fonction à trois termes et cette dernière dépassent un peu 0,02 degré.

Nous en tirons

$$\varphi' = -15{,}1\,T(100 - T)\,10^{-6}$$

et, par conséquent,

$$\frac{n' - N_\nu}{(m' - M_\nu) + 100(n' - N_\nu)} = -15{,}1.10^{-6}.$$

En introduisant la valeur du dénominateur trouvée précédemment (93), savoir 158.10^{-6}, on arrive à la relation

$$n' - N_\nu = -2{,}39.10^{-9}.$$

La différence trouvée se rapporte à la dilatation du verre avec les résidus; nous en déduisons, pour la dilatation sans les résidus,

$$n' - n_\nu = -2{,}5.10^{-9}.$$

Or nous avions admis, *a priori*,

$$n' = 3{,}42.10^{-9}, \qquad N_\nu = 24{,}0.10^{-9},$$

d'où l'on tire

$$n' - N_\nu = -20{,}6.10^{-9}.$$

Nous pouvons calculer encore la valeur de $N_c - N_\nu$.

Nous avions trouvé précédemment (p. 219) la relation

$$155{,}6(N_c - N_\nu) + 2{,}8(N_c + N_\nu) - 5{,}6n' = 195.10^{-9},$$

d'où nous avions déduit, à l'aide des valeurs provisoires de n' et de $N_c + N_\nu$, la différence

$$N_c - N_\nu = 0{,}56.10^{-9}.$$

En admettant cette dernière valeur et celle de $n' - N_v$, que nous venons de calculer par la théorie du thermomètre, on trouve

$$2,8(N_c - n' + N_v - n') = 15.10^{-9},$$

d'où, en introduisant dans la relation ci-dessus,

$$155,6(N_c - N_v) = 180.10^{-9}$$

et

$$N_c - N_v = 1,16.10^{-9}.$$

Une seconde approximation donne

$$N_c - N_v = 1,14.10^{-9}.$$

Cette valeur est beaucoup plus probable que celle que nous avions calculée à l'aide des nombres provisoires.

Nous en déduisons enfin, pour la dilatation relative du mercure et du cristal,

$$n' - N_c = -3,5.10^{-9} \quad \text{et} \quad n' - n_c = -8,5.10^{-9}.$$

Pour la réduction des observations barométriques faites sur une échelle en verre, il faut connaître la différence entre la dilatation cubique du mercure et la dilatation linéaire du verre.

Si l'on admet, d'après M. Benoît, pour la dilatation cubique du verre dur, sans les résidus, le coefficient du terme en T^2 égal à $24,0.10^{-9}$, on a, pour le second coefficient de la dilatation cubique du mercure, $n' = 21,7.10^{-9}$, et, pour le coefficient du terme en T^2 dans la formule représentant la différence entre la dilatation cubique du mercure et la dilatation linéaire du verre dur, la valeur $+13,7.10^{-9}$. Or, d'après les nombres admis précédemment, on aurait

$$m' - a_{v,h} = 174\,615.10^{-9}, \qquad n' - b_{v,h} = -5,1.$$

Si nous calculons la valeur de $m' - a_{v,h}$, pour laquelle les fonctions

$$(174\,615 - 5,1\,T)\,T.10^{-9} \quad \text{et} \quad (m' - a_{v,h} + 13,7T)\,T.10^{-9}$$

concordent le mieux possible entre 0° et 100°, nous trouvons

$$m' - a_{v,h} = 173\,215.10^{-9}.$$

Nous admettrons donc, pour calculer la Table de correction

des lectures barométriques faites sur une échelle en verre dur, l'argument

$$(173\,215 + 13{,}7\,T).10^{-9}.$$

C'est avec cet argument qu'a été calculée la Table II.

La discussion qui précède nous montre combien il serait nécessaire de faire de nouvelles déterminations précises de diverses constantes physiques très importantes (*voir* Note V).

117. Comparaisons aux températures élevées. — Les recherches faites jusqu'à ce jour sur le thermomètre à mercure au-dessus de 100° ne forment pas encore un ensemble aussi complet et aussi précis que les expériences aux températures plus basses.

Comme nous l'avons dit précédemment, les recherches de Regnault et de plusieurs autres observateurs sont devenues sans grand intérêt, par suite du fait qu'ils n'ont pas tenu compte des variations du zéro. Les recherches récentes les plus complètes que l'on possède dans ce domaine sont celles de M. Crafts [1]; il a comparé au thermomètre à hydrogène un groupe de quatorze thermomètres faits à Paris avec du cristal contenant 18 pour 100 d'oxyde de plomb. Les corrections qu'il faut appliquer aux indications de ces thermomètres pour les ramener à l'échelle normale sont données dans le Tableau suivant :

Températures.	Corrections.	Températures.	Corrections.
110°	+ 0°,02	230°	— 0°,02
120	+ 0,04	240	— 0,14
130	+ 0,09	250	— 0,26
140	+ 0,16	260	— 0,39
150	+ 0,25	270	— 0,50
160	+ 0,33	280	— 0,63
170	+ 0,35	290	— 0,88
180	+ 0,34	300	— 1,21
190	+ 0,32	310	— 1,60
200	+ 0,27	320	— 2,03
210	+ 0,18	330	— 2,48
220	+ 0,08		

[1] J.-M. Crafts, *Sur la comparaison des thermomètres à mercure avec le thermomètre à hydrogène* (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 836; 1882).

Thermomètres à échelle fractionnée. — Il peut être utile de graduer un thermomètre directement à une température élevée; on se dispense ainsi de reporter, au-dessus de 100°, la valeur de l'intervalle fondamental par un calibrage. M. Crafts conseille, pour cette graduation, l'emploi de la naphtaline et de la benzophénone, dont le point d'ébullition est très constant.

Dans le voisinage de la pression atmosphérique normale, la température d'ébullition de ces deux corps est donnée par les formules suivantes :

$$\text{Naphtaline}\ldots\ldots\ldots \quad T = 218^\circ,06 + \frac{H - 760}{17,1},$$

$$\text{Benzophénone}\ldots\ldots \quad T = 306^\circ,08 + \frac{H - 760}{15,8}.$$

Si l'on a gradué un thermomètre en l'exposant à la température d'ébullition de l'eau et à une de ces températures fixes, on annulera sa correction à 100° et à la seconde température de graduation, et l'on calculera ses corrections par rapport au thermomètre à hydrogène, en transformant les corrections ci-dessus à l'aide de la formule de transformation des corrections de calibre (p. 49).

118. Mesure des températures très élevées. — La recherche des méthodes au moyen desquelles on peut mesurer les températures très élevées ou très basses a fait l'objet de nombreux travaux récents. Les progrès réalisés dans ce domaine, depuis une dizaine d'années, sont très importants; mais ce problème n'est point encore entièrement résolu. Nous nous contenterons d'en donner un court aperçu, afin de montrer quelle est la direction actuelle des recherches.

Nous avons indiqué, à propos de l'examen du thermomètre à hydrogène, quels sont les procédés d'extrapolation que l'on peut employer à la mesure des températures très basses. Pour les températures élevées, le problème est un peu différent. D'abord, plus la température s'élève, plus les gaz s'approchent de l'état parfait; on peut donc fonder une mesure, dans le sens vrai du mot, sur le thermomètre à hydrogène ou sur d'autres thermomètres à gaz. En second lieu, l'extrapolation est moins certaine qu'aux températures basses, parce que les intervalles sur lesquels

il faut extrapoler sont beaucoup plus étendus. Enfin, tandis qu'aux températures basses les corps solides restent invariables, on constate que, bien avant leur point de fusion, la plupart des corps éprouvent des changements permanents.

En général, le problème de la mesure des températures très élevées se réduit à la recherche de variations thermiques bien définies, correspondant à des manipulations faciles, que l'on étudie dans des comparaisons préliminaires avec un thermomètre à gaz et qui le remplacent ensuite dans les mesures.

Les méthodes qui, dans l'état actuel de nos connaissances, paraissent s'adapter le mieux à ces mesures sont la méthode calorimétrique et les méthodes électriques basées sur les phénomènes thermo-électriques et la variation de la résistance électrique des métaux. La mesure des températures très basses peut être faite par les mêmes méthodes; nous avons donné un aperçu des recherches faites dans ce domaine, et nous nous bornerons maintenant à mentionner les travaux les plus complets sur la mesure des températures élevées, à l'aide des trois procédés que nous venons d'indiquer.

Méthode calorimétrique : Recherches de M. Violle. — Les déterminations faites par M. Violle ont donné pour la première fois la valeur des points de repère marqués par la fusion des métaux très réfractaires. La méthode suivie par cet habile physicien consistait à déterminer la chaleur spécifique des métaux en question, jusqu'à des températures aussi élevées que possible, et à mesurer ensuite la chaleur qu'ils rendaient à un calorimètre entre leur température de solidification et la température ambiante. Les échantillons étaient chauffés dans un moufle dont la température était déterminée au moyen d'un thermomètre à air. Les chaleurs spécifiques furent étudiées jusqu'à 1200° pour le platine, 1300° pour le palladium et 1400° pour l'iridium.

Le Tableau suivant résume les résultats trouvés par M. Violle [1] :

---

[1] J. Violle : *Chaleur spécifique et chaleur de fusion du platine* (*Comptes rendus*, t. LXXXV, p. 543; 1877). — *Chaleur spécifique et chaleur de fusion du palladium* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 981; 1878). — *Chaleurs spécifiques et points de fusion de quelques métaux réfractaires* (*Comptes rendus*, t. LXXXIX, p. 702; 1879).

Métaux.	Chaleur spécifique vraie à T°.	Température de fusion.
Argent.....	»	954°
Or.....	0,0324 + 0,000 003 T	1035
Cuivre.....	»	1054
Palladium.....	0,0582 + 0,000 020 T	1500
Platine.....	0,0317 + 0,000 012 T	1775
Iridium.....	0,0317 + 0,000 012 T	1950

Les points de fusion des métaux ont servi fréquemment, dans ces dernières années, comme points fixes pour la graduation d'échelles arbitraires.

Méthode thermo-électrique : Recherches de M. Le Chatelier. — Peu après la découverte des phénomènes thermo-électriques, les couples servirent à la mesure des températures. Mais la méthode basée sur ces phénomènes, provisoirement condamnée par Regnault, ne devint vraiment efficace que lorsque les progrès de la technique électrique eurent fourni des instruments de mesure précis et d'un emploi facile.

Les recherches récentes de M. Le Chatelier ont fait faire à la question de la mesure pratique des températures élevées, à l'aide du couple, un pas important (¹).

M. Le Chatelier examina d'abord divers métaux réfractaires qui paraissaient convenir à cette mesure. Un fil du métal à essayer, fermé sur un galvanomètre, était chauffé successivement dans toute sa longueur. Tous les échantillons de palladium et de fer manifestèrent leur manque d'homogénéité par des forces électromotrices qui se développaient dans cette opération; en revanche, les fils de platine pur ou allié au rhodium, à l'iridium et au cuivre se montrèrent d'une homogénéité presque parfaite.

Le couple adopté définitivement par M. Le Chatelier est formé d'un fil de platine pur et d'un fil de platine rhodié à 10 pour 100. Il présente une particularité remarquable : c'est que, entre 300° et 1200°, sa force électromotrice est représentée, dans les limites des erreurs d'observation, par une fonction linéaire.

(¹) Le Chatelier, *Séance de la Société française de Physique du 7 mai* 1886.

Le couple platine-platine rhodié, joint à un galvanomètre sensible, a déjà été employé comme pyromètre dans plusieurs recherches importantes.

Méthode des résistances électriques : Recherches de M. Callendar. — C'est C.-W. Siemens qui tenta, pour la première fois, de mesurer la température par la variation de résistance d'un fil de métal; depuis lors, cette méthode a reçu de nombreuses applications.

Les expériences les plus complètes sur la résistance électrique des métaux, en vue de la détermination des températures élevées, ont été faites par M. Callendar [1]. Il étudia, jusque vers 600°, la variation de résistance de divers fils de platine soudés dans le réservoir d'un thermomètre à air.

Les fils employés étaient extrêmement purs. Un premier recuit à 1200° diminua leur résistance, qui resta ensuite invariable.

Les deux coefficients de la formule parabolique représentant la variation de la résistance du platine sont, d'après M. Callendar,

$$\alpha = +0{,}003\,448, \qquad \beta = -0{,}000\,000\,533.$$

La différence entre les indications (T) du thermomètre à gaz et celle que l'on déduit de la résistance électrique du platine (t_p) est donc représentée par l'équation

$$T - t_p = -0{,}157\,T(100 - T)\,10^{-3}.$$

Entre 0° et 100°, les divergences ne dépassent pas 0,4 degré; elles atteignent 31 degrés à 500° et 47 à 600°.

Chacun des trois procédés que nous venons de mentionner s'applique particulièrement bien à un certain ordre de recherches. Celui qui est basé sur la variation des résistances électriques paraît être, pour le moment, le plus susceptible d'applications variées; aux températures ordinaires, il donne une précision peu inférieure à celles qu'il est possible d'atteindre avec le thermo-

---

[1] H.-L. CALLENDAR, *On the practical measurement of temperature* (*Phil. Trans.*, t. CLXXXVIII-A, p. 161; 1887).

mètre à mercure. Il laisse ce dernier loin derrière lui dans la mesure des variations prodigieusement faibles de la température telles que celles qui sont produites par les radiations émises par des corps dont la température est peu élevée et qui sont décomposées par un prisme ou un réseau. Les recherches faites depuis dix ans dans ce domaine par le professeur Langley ont ouvert à la Science des voies nouvelles.

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENTS ET APPLICATIONS.

TRANSFORMATION DES COEFFICIENTS THERMIQUES.

119. Recherche empirique des lois mathématiques. — Les variations qu'éprouvent les propriétés des corps lorsque leur température se modifie sont soumises à des lois dont la nature peut être parfois prévue en partant de suppositions élémentaires simples, que l'on développe par le calcul; mais, dans la plupart des cas, la forme de la relation mathématique qui existe entre la température et la grandeur de la variation en question n'est indiquée par aucune hypothèse nécessaire ou même probable. On cherche alors à rassembler les résultats de l'expérience dans une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la température, et dont les coefficients sont déterminés de manière à satisfaire le mieux possible aux conditions de l'expérience. Le nombre des termes de la série qu'il convient de conserver est indiqué *a posteriori* par l'accord entre les résultats de l'expérience et les variations calculées par la formule trouvée.

Pour toutes les applications, on peut alors conserver la formule telle qu'elle a été directement calculée; mais, si l'on veut remonter à la forme même de la vraie loi du phénomène, on cherchera à découvrir, entre les coefficients de cette formule, certaines relations numériques. Dans l'état actuel des mesures, il faut nécessairement se borner à la recherche de relations extrêmement simples; car, parmi les relations compliquées que l'on peut imaginer, il en est un très grand nombre qui satisfont également bien aux résultats de l'expérience.

Lorsque les relations numériques sont connues, la méthode déductive peut alors permettre de tirer des conclusions sur la nature des forces élémentaires qui entrent en jeu pour produire les variations thermiques observées.

La marche à suivre dans la recherche des relations numériques est aisée à trouver.

Soient t_0 une température de départ, t une variation exprimée dans une échelle et un système quelconques. Nous aurons

$$f(t_0+t)=f(t_0)\left[1+\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}\frac{t}{1}+\frac{f''(t_0)}{f(t_0)}\frac{t^2}{1.2}+\frac{f'''(t_0)}{f(t_0)}\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\right].$$

Remarquons d'abord que les coefficients des diverses puissances de t doivent dépendre de cette quantité, puisque, dans tous les cas, la somme des termes de la série doit avoir la même valeur, quelle que soit la fonction particulière t de la température absolue. S'il existait, par conséquent, des relations numériques simples entre ces coefficients dans une certaine échelle t, elles seraient détruites par le passage à une autre échelle, puisque les relations entre les différentes échelles sont compliquées, comparées à celles que nous cherchons. Or toute relation de ce genre exprimée dans une échelle arbitraire est elle-même arbitraire; donc, pour la recherche des relations numériques, la fonction f doit être exprimée par rapport à l'échelle absolue.

Lorsqu'on passe d'un système de températures à un autre, l'unité dans laquelle t est exprimé change et t varie réciproquement. L'unité arbitraire doit être éliminée des relations cherchées. Cette unité étant élevée aux mêmes puissances que t dans les différents termes de la formule, elle sera éliminée de la suite des rapports

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}:\sqrt{\frac{f''(t_0)}{2f(t_0)}}:\sqrt[3]{\frac{f'''(t_0)}{6f(t_0)}}:\ldots=m:n:p:\ldots.$$

Ces rapports dépendent encore de t_0, c'est-à-dire du point de départ des températures. Le seul point de départ qui ne soit pas arbitraire est le zéro absolu; les températures doivent donc être comptées à partir de ce point. La relation devient donc

$$\frac{f'(0)}{f(0)}:\sqrt{\frac{f''(0)}{2f(0)}}:\sqrt[3]{\frac{f'''(0)}{6f(0)}}:\ldots=m:n:p:\ldots.$$

En désignant par θ une température absolue, la formule dont les coefficients sont déduits de l'expérience doit avoir la forme

$$f(\theta) = f(0)(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma\theta^3 + \ldots),$$

et la relation supposée doit être cherchée dans les valeurs relatives des quantités α, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$, ...

Si, par exemple, on trouve

$$\alpha : \sqrt{\beta} : \sqrt[3]{\gamma} = 1 : 1 : 1,$$

on conclura que

$$f(\theta) = A(1 + k\theta + k^2\theta^2 + k^3\theta^3 + \ldots) = \frac{A}{1 - k\theta},$$

ou, pour

$$\alpha : \sqrt{\beta} : \sqrt[3]{\gamma} = 1 : 2^{-\frac{1}{2}} : 6^{-\frac{1}{3}}, \qquad \ldots,$$

on a

$$f(\theta) = A e^{k\theta}.$$

Nous montrerons maintenant comment on peut, à l'aide d'un calcul très simple, transformer un trinôme exprimé en fonction d'une échelle thermométrique donnée en un autre trinôme fonction d'une autre échelle.

120. Passage d'une échelle thermométrique à une autre. — Dans la presque totalité des expériences faites jusqu'ici, il a été possible de représenter les variations thermiques avec une précision égale ou supérieure à celle des mesures, par une fonction parabolique du second degré. Nous partirons d'une relation de ce genre, et, pour donner à l'exposé plus de netteté, nous choisirons comme type de variation la dilatation thermique.

Dans les recherches sur la dilatation des corps, on se sert presque exclusivement de thermomètres à mercure; c'est aussi au moyen de ces instruments que la température est mesurée dans la plupart des applications. Il est donc utile d'exprimer les dilatations en fonction de l'échelle des thermomètres à mercure. Mais les relations naturelles étant exprimées dans l'échelle normale, il faut pouvoir ramener toutes les relations à cette dernière. Il est utile aussi, en vue de la comparaison avec des expériences an-

ciennes, de réduire les dilatations à l'échelle du thermomètre à azote.

L'introduction du zéro absolu dans les formules peut avoir lieu après ces transformations, lorsqu'on a en vue la recherche des relations numériques dont la forme générale a été donnée précédemment.

Soit

$$l_t = l_0(1 + \alpha t + \beta t^2) \tag{1}$$

la fonction qui représente une dilatation thermique.

Nous nous proposons de transformer cette fonction en une autre fonction de même forme, dans laquelle T soit la variable; t et T sont reliées par l'équation

$$\left\{\begin{aligned} t &= T - T(100 - T)(A + BT + CT^2) \\ &= T(1 + H + IT + KT^2 + LT^3). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} H &= -100A, \\ I &= A - 100B, \\ K &= B - 100C, \\ L &= C, \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} A &= -\frac{H}{100}, \\ B &= -\frac{I}{100} - \frac{H}{100^2}, \\ C &= -\frac{K}{100} - \frac{I}{100^2} - \frac{H}{100^3} = L. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Posons $1 + H = H'$, et étendons les considérations qui vont suivre au cas où H' est très différent de l'unité. La transformation ne s'appliquera plus alors seulement au cas du passage d'une échelle centigrade à une autre échelle centigrade très voisine; en donnant à H' des valeurs convenables, elle pourra servir à passer du système centigrade au système Réaumur et inversement.

En introduisant la valeur de t, tirée de (2), dans l'équation (1), on obtient une fonction du huitième degré, que l'on peut écrire

$$l_T = l_0(1 + \mathfrak{a}T + \mathfrak{b}T^2 + \mathfrak{c}T^3 + \mathfrak{d}T^4 + \mathfrak{e}T^5 + \mathfrak{f}T^6 + \mathfrak{g}T^7 + \mathfrak{h}T^8). \tag{4}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \alpha H', & \mathfrak{e} &= 2\beta(H'L + IK). \\ \mathfrak{b} &= \alpha I + \beta H'^2, & \mathfrak{f} &= \beta(K^2 + 2IL). \\ \mathfrak{c} &= \alpha K + 2\beta H'I, & \mathfrak{g} &= 2\beta KL, \\ \mathfrak{d} &= \alpha L + \beta(I^2 + 2H'K), & \mathfrak{h} &= \beta L^2. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

La relation (4) est rigoureuse, mais elle est inapplicable; nous nous proposons de la remplacer par une formule du second degré

$$L_T = l_0(1 + \alpha' T + \beta' T^2), \tag{6}$$

dont les coefficients α' et β' seront déterminés par la condition que, entre deux températures données T_1 et T_2, la somme des carrés des différences entre les allongements soit un minimum.

La condition mathématique du problème est donc

$$\int_{T_1}^{T_2} (l_T - L_T)^2 dt = \text{minimum}. \tag{7}$$

En posant

$$\mathfrak{a} T + \mathfrak{b} T^2 + \mathfrak{c} T^3 + \mathfrak{d} T^4 + \mathfrak{e} T^5 + \mathfrak{f} T^6 + \mathfrak{g} T^7 + \mathfrak{h} T^8 = M, \tag{8}$$

cette condition se résout dans les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha'} \int_{T_1}^{T_2} (M - \alpha' T - \beta' T^2)^2 dT = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \beta'} \int_{T_1}^{T_2} (M - \alpha' T - \beta' T^2)^2 dT = 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

En effectuant la différentiation, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2} (\alpha' T^2 + \beta' T^3 - MT) dT = 0, \\ &\int_{T_1}^{T_2} (\alpha' T^3 + \beta' T^4 - MT^2) dT = 0 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} &\Big[\tfrac{2}{3}\alpha' T^3 + \tfrac{1}{2}\beta' T^4 - \tfrac{2}{3}\mathfrak{a} T^3 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} T^4 - \tfrac{2}{5}\mathfrak{c} T^5 \\ &\qquad - \tfrac{1}{3}\mathfrak{d} T^6 - \tfrac{2}{7}\mathfrak{e} T^7 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{f} T^8 - \tfrac{2}{9}\mathfrak{g} T^9 - \tfrac{1}{5}\mathfrak{h} T^{10}\Big]_{T_1}^{T_2} = 0, \\ &\Big[\tfrac{1}{2}\alpha' T^4 + \tfrac{2}{5}\beta' T^5 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} T^4 - \tfrac{2}{5}\mathfrak{b} T^5 - \tfrac{1}{3}\mathfrak{c} T^6 \\ &\qquad - \tfrac{2}{7}\mathfrak{d} T^7 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{e} T^8 - \tfrac{2}{9}\mathfrak{f} T^9 - \tfrac{1}{5}\mathfrak{g} T^{10} - \tfrac{2}{11}\mathfrak{h} T^{11}\Big]_{T_1}^{T_2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Ce sont les équations normales du problème.

Les coefficients de dilatation sont déterminés, le plus souvent,

par des expériences partant de 0°; nous admettrons cette température comme limite inférieure; en remplaçant, pour simplifier l'écriture, T_2 par T, les deux équations précédentes s'écrivent

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha' + \frac{1}{2}\beta' T = \frac{2}{3}\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} T + \frac{2}{5}\mathfrak{c} T^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{d} T^3 + \frac{2}{7}\mathfrak{e} T^4 + \frac{1}{4}\mathfrak{f} T^5 + \frac{2}{9}\mathfrak{g} T^6 + \frac{1}{5}\mathfrak{h} T^7, \\ \frac{1}{2}\alpha' + \frac{2}{5}\beta' T = \frac{1}{2}\mathfrak{a} + \frac{2}{5}\mathfrak{b} T + \frac{1}{3}\mathfrak{c} T^2 + \frac{2}{7}\mathfrak{d} T^3 + \frac{1}{4}\mathfrak{e} T^4 + \frac{2}{9}\mathfrak{f} T^5 + \frac{1}{5}\mathfrak{g} T^6 + \frac{2}{11}\mathfrak{h} T^7; \end{cases}$$

on tire de là

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha' = \mathfrak{a} - \frac{2}{5}\mathfrak{c} T^2 - \frac{4}{7}\mathfrak{d} T^3 - \frac{9}{14}\mathfrak{e} T^4 - \frac{2}{3}\mathfrak{f} T^5 - \frac{2}{3}\mathfrak{g} T^6 - \frac{36}{55}\mathfrak{h} T^7, \\ \beta' = \mathfrak{b} + \frac{4}{3}\mathfrak{c} T + \frac{10}{7}\mathfrak{d} T^2 + \frac{10}{7}\mathfrak{e} T^3 + \frac{25}{18}\mathfrak{f} T^4 + \frac{4}{3}\mathfrak{g} T^5 + \frac{14}{11}\mathfrak{h} T^6. \end{cases}$$

Ces deux formules générales donnent les valeurs des coefficients α' et β', dans l'échelle T, entre les limites 0° et T°, si l'on admet que t et T sont reliés par une fonction du quatrième degré; $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ s'annulent, si la relation adoptée est du troisième degré.

121. Cas particuliers. — Nous avons pris comme type du thermomètre à mercure le thermomètre en verre dur; c'est à l'échelle particulière à ce thermomètre que nous ramènerons, dans ce qui suit, les coefficients donnés en fonction des échelles des autres thermomètres à mercure. Les coefficients ainsi modifiés, ainsi que ceux qui sont exprimés directement en fonction des thermomètres à azote et à acide carbonique, seront ensuite transformés dans l'échelle normale. Nous prendrons, comme limites entre lesquelles les formules doivent concorder le mieux possible, les températures extrêmes auxquelles on peut faire de bonnes mesures au comparateur ou à l'apareil Fizeau, savoir 0° et 40° pour le premier, 0° et 85° pour le second de ces instruments. Les formules seront appliquées à une partie des échelles dont il a été question dans les Chapitres IV et V.

Thermomètres en cristal ordinaire et thermomètres en verre dur. — La différence de marche est exprimée par (p. 215)

$$t_c - t_v = t(100 - t)(16,701 - 0,0025\,t)\,10^{-6}.$$

Au degré d'approximation que l'on peut garantir dans le résultat de ces comparaisons, l'échelle t est indifféremment celle du verre ou du cristal.

Les valeurs de H, I, K, L à introduire dans les formules (5)

sont, d'après (3),

$$\begin{aligned} H &= +\ 1,6701.10^{-3}, \\ I &= -16,950\ .10^{-6}, \\ K &= +\ 2,5\ \ .10^{-9}, \\ L &= \ \ 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \ \ 1,0016701\alpha, \\ \mathfrak{b} &= -16,950.10^{-6}\alpha + 1,003343\beta, \\ \mathfrak{c} &= +\ 2,5\ \ .10^{-9}\alpha - 33,96.10^{-6}\ \beta, \\ \mathfrak{d} &= \qquad\qquad\qquad + \ 5,27.10^{-9}\ \beta, \\ \mathfrak{e} &= \qquad\qquad\qquad - 84\ \ \ .10^{-15}\beta, \\ \mathfrak{f} &= \qquad\qquad\qquad + \ 6,2\ .10^{-18}\beta; \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont nuls.

En remplaçant dans les formules (13), on a, pour $T = 40°$,

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \ \ 1,0016685\ \alpha_c + 0,0215\ \ \beta_c, \\ \beta_v &= -16,817.10^{-6}\alpha_c + 1,00154\beta_c. \end{aligned}$$

Pour $T = 85°$,

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \ \ 1,0016630\ \alpha_c + 0,0963\ \ \beta_c, \\ \beta_v &= -16,668.10^{-6}\alpha_c + 0,99955\beta_c. \end{aligned}$$

Thermomètres en cristal dur et thermomètres en verre dur. — La formule de réduction est (p. 215)

$$t'_c - t_v = t(100 - t)(14,126 - 0,0311\,t)10^{-6}.$$

Il résulte

$$\begin{aligned} H &= +\ 1,4126.10^{-3}, \\ I &= -17,236\ .10^{-6}, \\ K &= +31,1\ \ \ .10^{-9}, \\ L &= \ \ 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= +1,0014126\alpha, \\ \mathfrak{b} &= -17,236.10^{-6}\alpha + 1,002827\beta, \\ \mathfrak{c} &= +31,1\ \ .10^{-9}\alpha - 34,52.10^{-6}\ \beta, \\ \mathfrak{d} &= \qquad\qquad\qquad + 62,6\ .10^{-9}\ \beta, \\ \mathfrak{e} &= \qquad\qquad\qquad - \ 1,1\ .10^{-12}\beta, \\ \mathfrak{f} &= \qquad\qquad\qquad + \ 0,97.10^{-15}\beta. \end{aligned}$$

Pour $T = 40^\circ$,

$$\alpha_v = 1,0013927\,\alpha'_c + 0,0198\,\beta'_c,$$
$$\beta_v = -15,578.10^{-6}\alpha'_c + 1,00113\,\beta'_c.$$

Pour $T = 85^\circ$,

$$\alpha_v = 1,0013227\,\alpha'_c + 0,0778\,\beta'_c,$$
$$\beta_v = -13,712.10^{-6}\alpha'_c + 0,99956\,\beta'_c.$$

Thermomètres en verre dur et thermomètre à azote. — Nous avons donné précédemment (p. 250) la relation

$$T_{Az} - t_v = T_{Az}(100 - T_{Az})(-55,921 + 0,49616\,T_{Az} - 0,0025865\,T_{Az}^2)\,10^{-6}.$$

On en tire successivement

$$H = +5,5921\ .10^{-3},$$
$$I = -0,10554.10^{-3},$$
$$K = +0,75481.10^{-6},$$
$$L = -2,5865\ .10^{-9}$$

et

$$\begin{aligned}
a &= +1,0055921\,\alpha,\\
b &= -0,10554.10^{-3}\alpha + 1,011215\,\beta,\\
c &= +0,75481.10^{-6}\alpha - 0,21225.10^{-3}\,\beta,\\
d &= -2,5865\ .10^{-9}\alpha + 1,5292\ .10^{-6}\,\beta,\\
e &= \qquad\qquad\quad - 5,363\ .10^{-9}\,\beta,\\
f &= \qquad\qquad\quad + 1,12\ .10^{-12}\beta,\\
g &= \qquad\qquad\quad - 3,9\ .10^{-15}\beta,\\
h &= \qquad\qquad\quad + 6,7\ .10^{-18}\beta:
\end{aligned}$$

Pour $T = 40^\circ$, il vient

$$\alpha_{Az} = 1,0052036\,\alpha_v + 0,0887\,\beta_v,$$
$$\beta_{Az} = -71,193.10^{-6}\alpha_v + 1,00290\,\beta_v.$$

Pour $T = 85^\circ$, on trouve

$$\alpha_{Az} = 1,0043183\,\alpha_v + 0,2543\,\beta_v,$$
$$\beta_{Az} = -46,691.10^{-6}\alpha_v + 0,99830\,\beta_v.$$

Thermomètres en verre dur et thermomètre à hydrogène. — Nous avons trouvé, dans ce cas (p. 257),

$$T_H - t_v = T_H(100 - T_H)(-62,296 + 0,48946\,T_H - 0,0012805\,T_H^2)\,10^{-6}$$

d'où

$$H = +6,2296 \,.10^{-3},$$
$$I = -0,11124.10^{-3},$$
$$K = +0,61751.10^{-6},$$
$$L = -1,2805 \,.10^{-9}$$

et

$$\begin{aligned}
a &= 1,0062296\alpha.\\
b &= -0,11124.10^{-3}\alpha + 1,012498\beta,\\
c &= +0,61751.10^{-6}\alpha - 0,22387.10^{-3}\beta,\\
d &= -1,2805 \,.10^{-9}\alpha + 1,2551 \,.10^{-6}\beta,\\
e &= -2,714 \,.10^{-9}\beta,\\
f &= +0,666 \,.10^{-12}\beta,\\
g &= -1,58 \,.10^{-15}\beta,\\
h &= +1,6 \,.10^{-18}\beta.
\end{aligned}$$

Pour T = 40°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1,0058812\,\alpha_v + 0,1018\,\beta_v,\\
\beta_H &= -81,235.10^{-6}\alpha_v + 1,00318\beta_v.
\end{aligned}$$

Pour T = 85°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1,0048943\,\alpha_v + 0,2960\,\beta_v,\\
\beta_H &= -54,475.10^{-6}\alpha_v + 0,99774\beta_v.
\end{aligned}$$

Thermomètre à acide carbonique et thermomètre à hydrogène. — La transformation rigoureuse exigerait que la différence des échelles fût d'abord exprimée en fonction des indications du thermomètre à hydrogène; mais les modifications introduites dans les formules seraient de beaucoup inférieures à l'erreur probable du résultat; nous pouvons donc adopter, pour la formule de réduction, la différence entre les formules qui servent à passer des thermomètres à mercure en verre dur aux thermomètres à acide carbonique et à hydrogène. Nous aurons ainsi (p. 254)

$$T_{CO^2} - T_H = T(100 - T)(+28,910 - 0,09036\,T - 0,00038731\,T^2)10^{-6}.$$

Nous tirons de là

$$H = +\ 2,8910.10^{-3},$$
$$I = -\ 37,946 \,.10^{-6},$$
$$K = +\ 51,63 \,.10^{-9},$$
$$L = +\ 0,3873.10^{-9}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= 1{,}002891\,\alpha, \\
\mathfrak{b} &= -37{,}946\,.10^{-6}\alpha + 1{,}005790\,\beta, \\
\mathfrak{c} &= +51{,}63\,.10^{-8}\alpha - 76{,}1114\,.10^{-6}\,\beta, \\
\mathfrak{d} &= +0{,}3873\,.10^{-9}\alpha + 0{,}105998.10^{-6}\,\beta, \\
\mathfrak{e} &= +0{,}7728\,.10^{-9}\,\beta, \\
\mathfrak{f} &= -0{,}0267\,.10^{-12}\beta, \\
\mathfrak{g} &= +0{,}040\,.10^{-15}\beta, \\
\mathfrak{h} &= +0{,}15\,.10^{-18}\beta.
\end{aligned}$$

Pour T = 40°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1{,}002844\,\alpha_{CO^2} + 0{,}0436\,\beta_{CO^2}, \\
\beta_H &= -34{,}308.10^{-6}\alpha_{CO^2} + 1{,}00204\,\beta_{CO^2}.
\end{aligned}$$

Pour T = 85°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1{,}002606\,\alpha_{CO^2} + 0{,}1569\,\beta_{CO^2}, \\
\beta_H &= -28{,}098.10^{-6}\alpha_{CO^2} + 0{,}99893\,\beta_{CO^2}.
\end{aligned}$$

Les formules précédentes peuvent être combinées entre elles, de manière à donner de nouvelles formules de transformation ; nous exécuterons encore les calculs suivants.

Thermomètres en cristal et thermomètre à hydrogène. — En introduisant les valeurs de α_v et β_v, en fonction de α_c et β_c dans les formules qui donnent α_H et β_H par rapport à α_v et β_v, on trouve :

Pour T = 40°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1{,}0075578\,\alpha_c + 0{,}1236\,\beta_c, \\
\beta_H &= -98{,}241.10^{-6}\alpha_c + 1{,}00472\,\beta_c.
\end{aligned}$$

Pour T = 85°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1{,}0065605\,\alpha_c + 0{,}3926\,\beta_c, \\
\beta_H &= -71{,}196.10^{-6}\alpha_c + 0{,}99729\,\beta_c.
\end{aligned}$$

Thermomètre à azote et thermomètre à hydrogène. — En résolvant par rapport à α_v et β_v les formules qui relient α_{Az} et β_{Az} à ces dernières quantités et en introduisant dans les valeurs de α_H et β_H, on trouve :

Pour T = 40°,

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= 1{,}0006750\,\alpha_{Az} + 0{,}0130\,\beta_{Az}, \\
\beta_H &= -9{,}970.10^{-6}\alpha_{Az} + 1{,}00028\,\beta_{Az}.
\end{aligned}$$

Pour T = 85°,

$$\alpha_H = 1,0005754\ \alpha_{Az} + 0,0416\ \beta_{Az},$$
$$\alpha_H = -7,777.10^{-6}\alpha_{Az} + 0,99944\beta_{Az}.$$

Les formules qui viennent d'être développées s'appliquent avec une approximation satisfaisante à la résolution du problème proposé, pour des limites de température plus rapprochées que celles pour lesquelles les coefficients ont été calculés; mais, en dehors des limites prescrites, les divergences entre le trinôme de dilatation primitif et le trinôme transformé croissent rapidement. Si l'on veut établir la concordance des dilatations entre des limites sensiblement plus éloignées, il convient d'établir les formules qui servent à la transformation en question.

122. Vérification. — Il est utile de vérifier le calcul numérique par un chemin détourné. On y arrive, en calculant les dilatations, pour un certain nombre de températures équidistantes, par la formule donnée et par la formule transformée ; on donnera à t, dans ces deux formules, les valeurs correspondantes d'une même température dans les deux échelles. Les Tables VIII, IX et X peuvent être employées pour ce calcul.

Dans la plupart des transformations qui viennent d'être indiquées, on a réduit au second degré une fonction du huitième degré de la température, en cherchant à faire concorder le mieux possible les résultats. Les deux fonctions ont seize valeurs communes, parmi lesquelles plusieurs peuvent être infinies ou imaginaires. Les autres, généralement en petit nombre, sont réelles et comprises entre les limites prescrites pour la concordance. Aux autres températures, les valeurs des fonctions diffèrent.

123. Exemple. — M. Benoît a trouvé [1] pour la dilatation du trépied de l'appareil Fizeau dont il s'est servi :

$$\alpha_c = 8,539594.10^{-6},$$
$$\beta_c = 2,2985\ .10^{-9}.$$

L'échelle de température est celle des thermomètres à mercure en cristal ordinaire.

---

[1] *Travaux et Memoires*, t. VI, p. 98.

En substituant successivement dans les formules de transformation dans l'échelle du verre dur, de l'azote et de l'hydrogène, entre 0° et 40°, on trouve :

$$\alpha_v = 8,553892 \,.\, 10^{-6},$$
$$\beta_v = 2,1584 \,.\, 10^{-9};$$
$$\alpha_{Az} = 8,598594 \,.\, 10^{-6},$$
$$\beta_{Az} = 1,5557 \,.\, 10^{-9};$$
$$\alpha_H = 8,604418 \,.\, 10^{-6},$$
$$\beta_H = 1,4704 \,.\, 10^{-9}.$$

Les valeurs correspondantes des mêmes températures dans les quatre échelles sont :

Indications correspondantes des thermomètres			
à mercure		à gaz.	
en cristal ordinaire.	en verre dur.	Azote.	Hydrogène.
0°	0°	0°	0°
10	9,9850	9,9389	9,9335
20	19,9734	19,8981	19,8888
30	29,9651	29,8740	29,8628
40	39,9603	39,8638	39,8529

Les dilatations moyennes entre 0°, 10°, 20°, 30° et 40°, sont :

t_c.	Cristal.	Verre dur.	Azote.	Hydrogène.
0.....	8,53959	8,55389	8,59859	8,60442
10.....	8,56258	8,57545	8,61405	8,61902
20.....	8,58556	8,59699	8,62955	8,63366
30.....	8,60855	8,61857	8,64506	8,64835
40.....	8,63153	8,64014	8,66062	8,66302

Les allongements en microns par mètre sont les suivants :

	Cristal.	Verre dur.		Azote.		Hydrogène.	
t_c.	$l_t - l_0$.	$l_t - l_0$.	Δ_1.	$l_t - l_0$.	Δ_2.	$l_t - l_0$.	Δ_3.
0.....	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10.....	85,626	85,626	0,000	85,614	+0,012	85,617	+0,009
20.....	171,711	171,710	+0,001	171,712	−0,001	171,713	−0,002
30.....	258,256	258,256	0,000	258,263	−0,007	258,264	−0,008
40.....	345,261	345,263	−0,002	345,245	+0,016	345,246	+0,015

124. Changement du système de températures. — Bien que, dans la presque totalité des travaux scientifiques actuels, le système centigrade des températures soit le seul employé, il convient d'établir les formules qui relient les fonctions exprimées dans ce système à des fonctions des systèmes Réaumur et Fahrenheit.

Pour ramener au système centigrade une dilatation donnée dans le système Réaumur, on remplacera la relation (2) du n° **120** par

$$t = 0,8\,\mathrm{T} = \mathrm{H'T},$$

t et T désignant la même température dans les systèmes Réaumur et centigrade. En remplaçant dans (5) et (13), on trouve

$$\mathfrak{a} = 0,8\ \alpha_R = \alpha_C,$$
$$\mathfrak{b} = 0,64\,\beta_R = \beta_C.$$

$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots, \mathfrak{h}$ sont nuls.

Si l'on veut passer du système Fahrenheit au système centigrade, les formules précédentes, trouvées en supposant que les deux systèmes partent du même zéro, ne suffisent plus ; il faut poser

$$t = 32 + 1,8\,\mathrm{T}.$$

En substituant directement dans l'équation (1), on trouve

$$\alpha_C = 1,8\ \alpha_F + 115,2\,\beta_F,$$
$$\beta_C = 3,24\,\beta_F.$$

La longueur initiale à 0°C., par rapport à la longueur à 0°F., est

$$l_0(1 + 32\,\alpha_F + 1024\,\beta_F).$$

Une dilatation exprimée dans le système Fahrenheit par

$$l_t = l_0(1 + \alpha_F t + \beta_F t^2)$$

sera donnée, dans le système centigrade, par

$$l_T = l_0[1 + 32\,\alpha_F + 1024\,\beta_F + (1,8\,\alpha_F + 115,2\,\beta_F)\,\mathrm{T} + 3,24\,\beta_F\,\mathrm{T}^2].$$

Pour les transformations inverses, on posera

$$t = 1,25\,\mathrm{T},$$

pour passer du système centigrade au système Réaumur ; d'où

$$\mathfrak{a} = 1,25\ \alpha_C = \alpha_R,$$
$$\mathfrak{b} = 1,5625\,\beta_C = \beta_R,$$

et, pour passer du système centigrade au système Fahrenheit,

$$t = \frac{5}{9}(T - 32) = 0,555\ldots(T - 32).$$

On en tire

$$\alpha_F = 0,555\ldots, \alpha_C - 19,753\,\beta_C,$$
$$\beta_F = 0,30864\ \beta_C.$$

La longueur initiale à 0°F. est

$$l_0(1 - 17,77\ldots, \alpha_C + 316,05\,\beta_C).$$

Si, enfin, on veut compter les températures à partir du zéro absolu, on posera

$$t = T - 273,$$

d'où

$$l_0(1 + \alpha t + \beta t^2) = l_0[1 - 273\alpha + 74529\beta + (\alpha - 546\beta)T + \beta T^2].$$

La longueur initiale au zéro absolu devient

$$l_0(1 - 273\alpha + 74529\beta);$$

les nouveaux coefficients de la dilatation sont

$$\alpha' = \alpha - 546\beta,$$
$$\beta' = \beta.$$

125. Dilatations cubiques. — Les formules développées précédemment peuvent être appliquées directement au calcul des dilatations cubiques.

La dilatation linéaire d'un corps étant donnée par une formule contenant les deux premières puissances de t, la dilatation cubique sera exprimée par une fonction du sixième degré en t. Cette fonction pourra être réduite au second degré par les formules (13) du n° **120**, dans lesquelles $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... sont les coefficients des puissances croissantes de t dans l'expression de la dilatation cubique ; $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont nuls.

Supposons le cas tout à fait général où les dilatations sont différentes dans trois directions perpendiculaires, et désignons par α_1 et β_1, α_2 et β_2, α_3 et β_3 les coefficients de la dilatation dans chaque direction ; nous obtiendrons les deux coefficients d'une formule quadratique pour la dilatation cubique en introduisant, dans les

deux formules (13), les valeurs suivantes des constantes :

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\\
b &= \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\\
c &= \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\\
d &= \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1 + \alpha_3\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_3,\\
e &= \alpha_1\beta_2\beta_3 + \alpha_2\beta_3\beta_1 + \alpha_3\beta_1\beta_2,\\
f &= \beta_1\beta_2\beta_3.
\end{aligned}
$$

Lorsque les dilatations sont les mêmes dans les trois directions, les formules se réduisent à

$$
\begin{aligned}
a &= 3\alpha,\\
b &= 3(\alpha^2 + \beta),\\
c &= \alpha(\alpha^2 + 6\beta),\\
d &= 3\beta(\alpha^2 + \beta),\\
e &= 3\alpha\beta^2,\\
f &= \beta^3.
\end{aligned}
$$

Dans ce dernier cas, on aura

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= 3\alpha - \tfrac{2}{5}\alpha(\alpha^2 + 6\beta)T^2 - \tfrac{12}{7}\beta(\alpha^2 + \beta)T^3 - \tfrac{27}{14}\alpha\beta^2T^4 - \tfrac{2}{3}\beta^3T^5,\\
\beta' &= 3(\alpha^2 + \beta) + \tfrac{4}{3}\alpha(\alpha^2 + 6\beta)T + \tfrac{30}{7}\beta(\alpha^2 + \beta)T^2 + \tfrac{30}{7}\alpha\beta^2T^3 + \tfrac{25}{18}\beta^3T^4.
\end{aligned}
$$

Dans l'état actuel des mesures, il est rarement utile de conserver plus de deux termes dans chaque formule.

126. Compensation entre les coefficients. — *Premier cas.* — Lorsqu'on réunit les résultats des mesures relatives à une variation thermique dans une formule du second degré, les variations sont représentées aussi bien que possible par la formule trouvée ; mais des données expérimentales très peu différentes peuvent conduire à une formule dont les deux coefficients diffèrent sensiblement de ceux de la première ; l'un sera plus petit, l'autre plus grand que le coefficient correspondant ; les variations données par chacun des termes différeront, mais leur somme se rapprochera beaucoup de la variation donnée par la première formule. Il est aisé de s'en rendre compte.

Considérons une dilatation et prenons comme exemple le platine

iridié. Le coefficient du terme en t^2 est égal à $1,5.10^{-9}$ environ. Entre 0° et 40°, ce terme donne, pour 1^m, un accroissement de $2^\mu,4$; si donc nous réunissons les extrémités de l'arc de la parabole de dilatation par une droite, la courbe s'en écartera, au maximum, de $0^\mu,6$; il suffira donc de commettre, aux deux extrémités et au milieu de la mesure, des erreurs de $0^\mu,3$ en sens contraire, pour annuler le coefficient β. Le coefficient α sera augmenté, et les dilatations données par les deux formules différeront au maximum de $0^\mu,3$.

Les résultats accessoires des comparaisons de thermomètres nous ont conduit à affirmer que le coefficient du terme en t^2, dans le verre et, *a fortiori,* dans les métaux et alliages d'une composition déterminée possédant de bonnes qualités thermiques, concorde, d'un échantillon à l'autre, beaucoup mieux que des expériences directes ne permettraient de le supposer.

Après avoir déterminé la formule de dilatation pour un certain nombre d'échantillons d'un même métal, on pourra donc admettre que, dans ces diverses formules, le coefficient β doive concorder, et calculer, pour chaque échantillon, le coefficient α en adoptant, pour β, la moyenne des nombres trouvés.

Nous aurons donc à résoudre le problème suivant :

Étant donnée la fonction entière du second degré représentant le mieux possible le résultat des observations faites sur une variation thermique, et la nouvelle valeur du coefficient du terme au carré, trouver la valeur du premier terme pour laquelle la seconde formule se rapproche le plus possible de la première.

Soit

$$l_t = l_0(1 + \alpha t + \beta t^2)$$

la formule de variation trouvée ; remplaçons β par β', et cherchons la valeur de α' qui, mise dans la fonction

$$l'_t = l_0(1 + \alpha' t + \beta' t^2),$$

satisfasse à la condition

$$\int_{t_1}^{t_2} (l'_t - l_t)^2\, dt = \text{minimum}.$$

Nous aurons donc

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\alpha' - \alpha)t + (\beta' - \beta)t^2]^2\, dt = \text{minimum}$$

ou

$$\frac{d}{d\alpha'} \int_{t_1}^{t_2} [(\alpha' - \alpha)t + (\beta' - \beta)t^2]^2\, dt = 0.$$

On tire de là

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\alpha' - \alpha)t + (\beta' - \beta)t^2]\, t\, dt = 0$$

et, en effectuant l'intégration,

$$\left[(\alpha' - \alpha)\frac{t^3}{3} + (\beta' - \beta)\frac{t^4}{4}\right]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

d'où

$$\alpha' = \alpha + \frac{3}{4}(\beta - \beta')\frac{t_2^4 - t_1^4}{t_2^3 - t_1^3}.$$

Pour $t_1 = 0$,

$$\alpha' = \alpha + \frac{3}{4}(\beta - \beta')t.$$

Les deux formules concorderont le mieux possible entre 0° et t°. Ce problème est susceptible de nombreuses applications.

Deuxième cas. — Un grand nombre de dilatations, déduites par un calcul rigoureux ou non d'expériences souvent bien faites (¹), sont exprimées par une formule du troisième ou du quatrième degré, tandis qu'il serait le plus souvent possible d'établir une formule du second degré représentant les résultats des expériences avec des écarts de beaucoup inférieurs aux erreurs des mesures. Certaines de ces expériences devraient être discutées et soumises à un nouveau calcul ; pour d'autres, on pourrait se contenter de réduire à un degré moindre, au moyen d'une transformation générale, la formule donnée par l'auteur.

Les équations (11) du n° **120**, résolues par rapport à α' et β', ou, dans un cas particulier, les formules (13) peuvent servir à cette transformation. Les coefficients α, β, γ, δ de la formule donnée seront assimilés à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$; les parties droites des équations (13)

(¹) Par exemple, les dilatations des liquides déterminées par Isidore Pierre.

ne contiendront plus que deux ou trois termes, suivant que la formule primitive en contient trois ou quatre.

DÉTERMINATION DE LA DILATATION DES CORPS SOLIDES.

La détermination des dilatations est un problème classique de la Physique pratique. Un grand nombre de procédés ont été successivement employés pour cette détermination; mais ce problème n'est entré dans le domaine de la haute précision qu'à la suite des études thermométriques de ces dix dernières années. Deux méthodes sont actuellement employées avec succès : ce sont la méthode du comparateur et la méthode optique de M. Fizeau; leur étude nous donnera une application intéressante des principes développés dans cet Ouvrage ; nous en exposerons les traits essentiels, en insistant particulièrement sur la mesure des températures (1).

MÉTHODE DU COMPARATEUR.

127. Exposé de la méthode. — La mesure des dilatations au moyen du comparateur consiste dans la détermination des différences entre la règle à étudier, portée à diverses températures, et une autre règle, maintenue à température constante. En général, les règles dont il s'agit ici sont *à traits*, c'est-à-dire que la longueur qui sert d'étalon y est définie par la distance de deux traits placés à une petite distance des extrémités.

Les observations sont faites au moyen de microscopes munis de micromètres ; les deux règles sont mesurées alternativement, de façon que les déplacements lents que peuvent éprouver les microscopes se trouvent éliminés.

---

(1) L'exposé qui suit est emprunté à une série d'excellents Mémoires de M. Benoît insérés dans les tomes I, II, III et VI des *Travaux et Mémoires*. Les figures et planches qui accompagnent la description sont extraites de ses publications. Nous renverrons, pour certains détails, aux travaux originaux. M. Benoît vient de publier, dans le *Journal de Physique* (juin 1889), un résumé de ses recherches.

Outre les méthodes que nous exposons ici, il existe divers procédés indirects susceptibles de donner, parfois avec une grande exactitude, non pas la formule de dilatation en entier, mais seulement des conditions auxquelles certains termes de la formule doivent satisfaire. Nous en avons donné des exemples dans les nos 93 et 116.

128. Description du comparateur. — L'appareil se compose

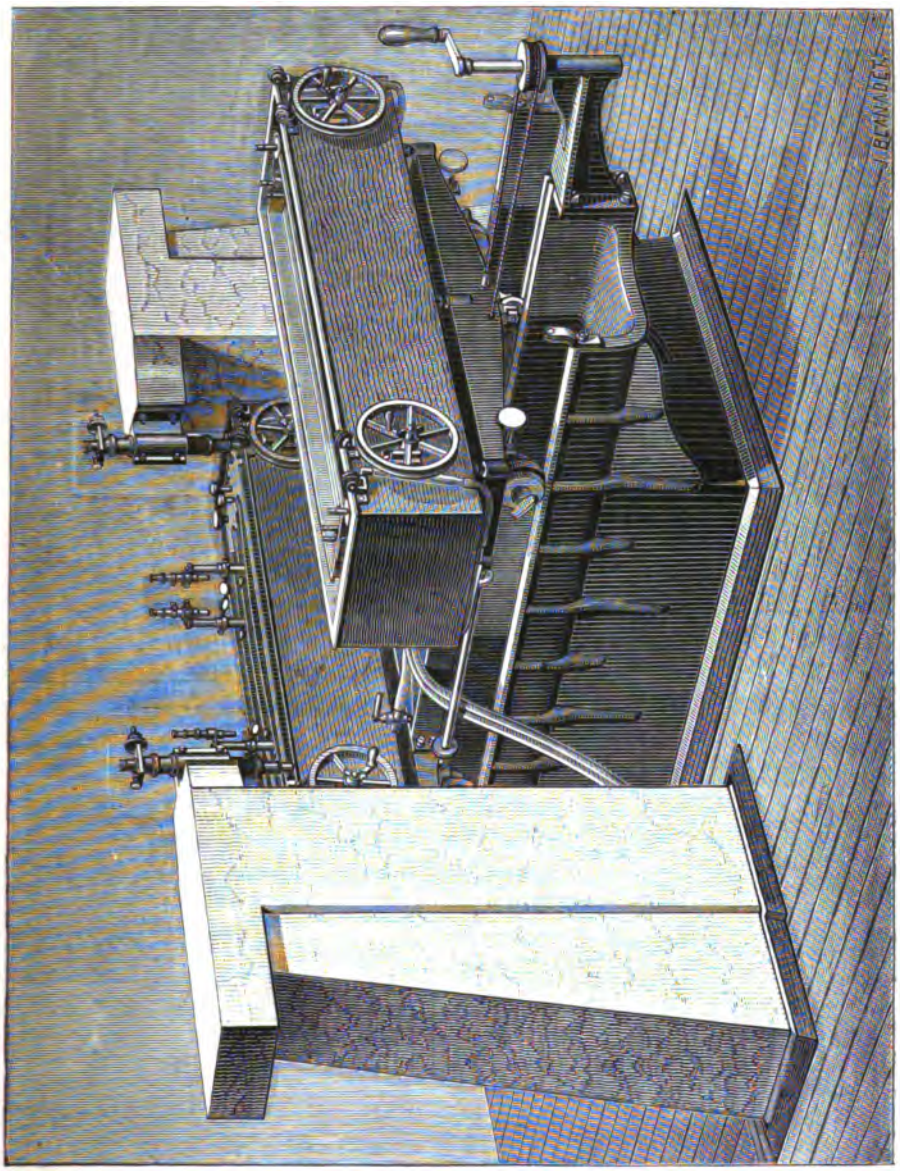


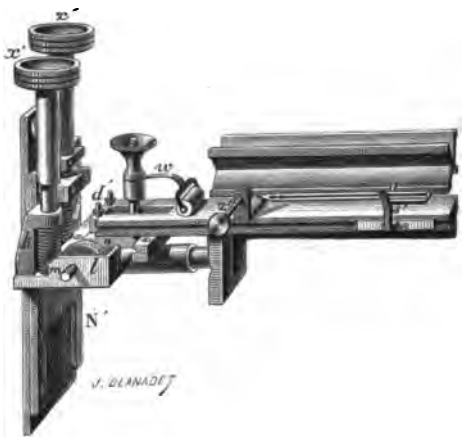
Fig. 39.

(*fig.* 39, *Pl. II, III* et *IV*) de deux piliers de pierre P, P′ aux-

quels sont fixés, par l'intermédiaire de fortes équerres, les microscopes M et M′, et de deux auges reposant sur un chariot C mobile sur un solide bâti en fonte Q. Celui-ci porte, à sa partie supérieure, trois saillies longitudinales S, S′ et T, servant respectivement à soutenir le chariot roulant sur les galets G et à le guider par l'intermédiaire de petits galets *g*. Les axes des galets G passent dans des équerres E coulées avec le chariot. Les auges sont supportées par les vis V.

Les auges ont été construites de manière à permettre les com-

Fig. 40.

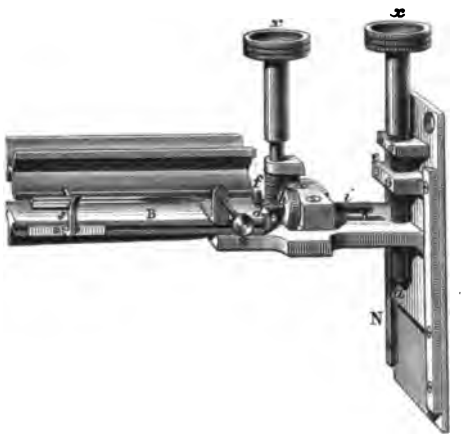


paraisons dans un liquide ; elles sont à double enveloppe. L'auge extérieure E est garnie de bois ; l'auge intérieure I, placée sur les pieds R, R′, contient un support ou banc B muni de deux rouleaux *r*, *r′* sur lesquels la règle peut se dilater librement. Le banc appuie sur les pièces N, N′ (*fig.* 40 et 41), portées par les parois extrêmes de l'auge; il est muni de divers organes de réglage longitudinal, latéral, ou de haut en bas, commandés par les boutons *x*, *x′*. Les *fig.* 40 et 41 représentent, sur le banc, les deux extrémités d'une règle en forme de X, suivant le modèle adopté par le Comité international des Poids et Mesures, pour les étalons prototypes du mètre en platine iridié. Les fourchettes *s*, *s′* portent des thermomètres placés symétriquement autour des règles.

Tout l'appareil repose sur un grand socle en béton aggloméré.

Le mouvement du chariot peut être produit rapidement, au moyen d'une corde H, qui s'attache en *o* et *o'* aux deux auges, et passe sur les poulies O et O'; la poulie O est commandée par la manivelle Y. Des butoirs K limitent le mouvement. Le réglage exact s'effectue par un mouvement micrométrique ; dans ce but, des pignons striés Z peuvent être pressés contre les galets par des écrous D et commandés par des vis sans fin faisant partie de deux tringles F qui portent les boutons J. L'observateur ayant l'œil au microscope a toujours un de ces boutons à portée de la main.

Fig. 41.



La constance et l'uniformité de la température sont obtenues par les procédés déjà décrits à propos de la comparaison des thermomètres. Dans le cas présent, ces conditions doivent être satisfaites avec une grande perfection.

Les auges sont fermées par des couvercles métalliques percés de fenêtres qui permettent de voir les extrémités des règles et de lire les thermomètres au moyen de lunettes disposées à cet effet ; d'autres ouvertures laissent passer les boutons de réglage.

Les traits des règles sont éclairés par un faisceau de lumière fourni par de petites lampes à incandescence, et renvoyé verticalement par un prisme placé sous l'objectif, ou par un miroir circulaire percé d'un trou central situé à l'intérieur du microscope.

129. Expériences. — Les règles et les thermomètres qui les accompagnent, étant placés dans leurs auges respectives préalablement remplies d'eau, on fait arriver, dans les auges extérieures, un courant d'eau amenée à une température convenable dans une cuve munie d'un thermo-régulateur et placée hors de la salle d'expériences. Dans des mesures successives, on change la température de l'eau dans l'auge n° 1 contenant la règle à étudier, tandis que la température de l'auge n° 2 est toujours la même.

Lorsque la température commence à se fixer, on agite par intermittences l'eau des deux auges, afin d'établir le régime dans les circonstances des expériences. La température étant suffisamment constante, on procède aux comparaisons.

Les expériences ont lieu dans l'ordre suivant : Lecture des thermomètres de l'auge n° 1 ; mesure de la règle à étudier. Lecture des thermomètres de l'auge n° 2 ; mesure de la règle de comparaison. Mesures alternatives des règles, avec une ou deux lectures des thermomètres dans le cours de la série ; la série se termine dans l'ordre inverse du commencement.

La pratique de ces expériences enseigne qu'il est très difficile d'obtenir une température suffisamment constante et uniforme, particulièrement dans une auge qui est portée à des températures très différentes de celle qui règne dans la salle. On n'arrive à une constance suffisante qu'en faisant durer la préparation de l'expérience pendant un temps prolongé ; l'uniformité est atteinte par une agitation fréquente et vigoureuse de l'eau. Malgré cela, il n'est pas rare de constater, entre les diverses parties de l'auge, des différences de température atteignant plusieurs centièmes de degré.

130. Réduction des observations. — Les allongements de la règle à examiner étant exprimés en tours de la vis du micromètre sont corrigés des erreurs de la vis, et réduits en unités métriques au moyen de la tare du microscope, c'est-à-dire de la valeur du pas de la vis, par rapport au millimètre. En général, un tour de la vis correspond très sensiblement à $0^{mm},1$, et le champ comprend environ 1^{mm}.

La moyenne des températures lues à chaque thermomètre est réduite, ainsi qu'il a été dit page 122. Lorsqu'on ne connaît pas les lois de la dépression du zéro dans les thermomètres, il convient

de déterminer la position de ce point après chaque expérience. Lorsque ces lois sont connues, on peut employer un des procédés de calcul indiqués page 163.

La température moyenne de la règle doit être calculée par un procédé particulier. La température du bain n'est jamais parfaitement constante ; lorsque sa variation avec le temps n'est pas linéaire, la moyenne des lectures des thermomètres ne correspond généralement pas exactement à la température moyenne de la règle, dans les mesures faites en plus grand nombre.

Supposons, pour avoir un cas déterminé, que les lectures des thermomètres soient au nombre de trois, les mesures de la règle au nombre de cinq. Les mesures 1, 3, 5 de la règle pourront être considérées comme simultanées aux lectures des thermomètres. Les températures, au moment des mesures 2 et 4, devront être interpolées. Après avoir calculé les moyennes des lectures brutes des thermomètres aux époques 1, 3, 5, on mènera, par les points trouvés, une courbe sur laquelle on mesurera les températures aux époques 2 et 4. La moyenne des cinq températures différera, en général, de la moyenne brute, d'une petite quantité que l'on ajoutera, comme correction, à la moyenne des températures réduites. L'interpolation peut être graphique ou analytique. Dans le cas supposé ici, la solution analytique est extrêmement simple.

Désignons par o, x_1, $2x_1$ les époques auxquelles sont faites les lectures des thermomètres ; par y_0, y_1, y_2 les températures brutes. Supposons que la température soit donnée par une fonction parabolique

$$y = ax^2 + bx + c;$$

en introduisant les valeurs correspondantes de x et de y, et en résolvant par rapport à a, b et c, on trouve

$$y = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2} x^2 + \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2} x + y_0.$$

Cette formule permet de calculer les valeurs de y pour $x = \frac{x_1}{2}$ et $\frac{3x_1}{2}$; en divisant la somme des températures par 5, on trouve

$$x_{\text{moyen}} = \frac{1}{4}(y_0 + 2y_1 + y_2).$$

Exemple. — Les lectures brutes des thermomètres sont les suivantes :

Lectures n°s	Thermomètres n°s I.	II.	III.	IV.	Moyennes.
	°	°	°	°	°
1.....	28,456	28,362	28,390	28,478	28,421
2.....	28,484	28,396	28,425	28,500	28,451
3.....	28,442	28,354	28,378	28,470	28,411
Moyennes...	28,461	28,371	28,398	28,483	28,428

Comme vérification, la moyenne générale inscrite dans l'angle inférieur droit du Tableau doit être la même pour les trois moyennes partielles relatives à des moments déterminés, et pour les quatre moyennes relatives aux divers thermomètres.

En employant la formule ci-dessus, nous trouvons, comme moyenne vraie des températures de la règle 28°,433; nous aurons donc à ajouter, à la moyenne des températures réduites, la correction + 0,005 degré.

Ce mode de calcul des températures moyennes vraies est d'un emploi fréquent.

131. Calcul des coefficients de dilatation. — Désignons par X_t la longueur (en microns) à t° de la règle dont on veut déterminer le coefficient de dilatation, et par C_τ la longueur à τ° de la règle de comparaison. Chaque série d'observations conduit, toutes réductions faites, à une relation de la forme

$$X_t - C_\tau = a.$$

Les températures τ, dans toutes les observations faisant partie d'une même détermination, sont très voisines les unes des autres; on peut donc, sans erreur appréciable, réduire toutes les longueurs de la règle C à une même température θ, moyenne de tous les τ. En multipliant sa dilatation à θ° par les différences $\theta - \tau$, on obtient ainsi un nouveau système d'équations dans lesquelles les termes connus diffèrent très peu des quantités a directement observées; ce système peut être écrit

$$\begin{aligned} X_{t_1} - C_\theta &= b_1, \\ X_{t_2} - C_\theta &= b_2, \\ X_{t_3} - C_\theta &= b_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nous donnerons à chacune de ces équations le même poids, et nous poserons

$$X_t = X_0(1 + \alpha t + \beta t^2).$$

Les équations ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned} X_0 + X_0\alpha t_1 + X_0\beta t_1^2 - C_\theta &= b_1, \\ X_0 + X_0\alpha t_2 + X_0\beta t_2^2 - C_\theta &= b_2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} X_0 - C_\theta &= x, \\ X_0\alpha &= y, \\ X_0\beta &= z. \end{aligned}$$

Les équations prennent la forme

$$\begin{aligned} x + t_1 y + t_1^2 z &= b_1, \\ x + t_2 y + t_2^2 z &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si p est le nombre des équations, on est conduit aux équations normales

$$\begin{aligned} px + [t]y + [t^2]z &= [b], \\ [t]x + [t^2]y + [t^3]z &= [tb], \\ [t^2]x + [t^3]y + [t^4]z &= [t^2 b]. \end{aligned}$$

La résolution de ce système donne l'équation de la règle X à 0° par rapport à la règle C à θ°, et les deux constantes α et β de la dilatation en microns multipliées par la longueur de la règle dans la même unité. Connaissant X_0 en fonction du mètre (ou du micron), on en tire les valeurs absolues de α et de β.

Erreurs probables des inconnues. — En introduisant les valeurs de α et β dans les équations de condition, et en supposant les températures exactes, on calcule les erreurs résiduelles portant sur la mesure des longueurs. On en déduit l'erreur probable d'une observation par la formule

$$r = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{p-3}},$$

et, par suite, en écrivant les équations normales,

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [an], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et en adoptant la notation de Gauss pour leur résolution, l'erreur probable des inconnues se calculera par les formules suivantes :

$$r_z = r\frac{1}{\sqrt{[cc_2]}},$$

$$r_y = r\sqrt{\frac{[cc_1]}{[bb_1][cc_2]}},$$

$$r_x = r\sqrt{\frac{1}{[aa]} + \frac{A'A'}{[bb_1]} + \frac{A''A''}{[cc_2]}}.$$

En posant

$$A' = \frac{[ab]}{[aa]},$$

$$A'' = \frac{[ac]}{[aa]} - A'\frac{[bc_1]}{[bb_1]}.$$

L'erreur probable de la fonction $y + tz$ est

$$R = r\sqrt{\frac{1}{[bb\cdot 1]} + \frac{\left(\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - t\right)^2}{[cc\cdot 1]}}.$$

MÉTHODE DE M. FIZEAU.

132. Exposé de la méthode. — Dans ses célèbres recherches sur la réfraction des cristaux, publiées en 1862 (1), M. Fizeau eut recours à un procédé particulier, basé sur l'observation des anneaux de Newton produits entre les deux faces parallèles du corps à étudier. Parmi les corrections qu'il fallait appliquer à ces observations, la plus forte et sans doute la plus mal connue résultait de la dilatation thermique des corps en question. M. Fizeau adopta, pour cette réduction, les nombres les mieux déterminés, sur lesquels il opéra du reste un contrôle expérimental très ingénieux. Ce ne fut que deux ans plus tard qu'il songea à appliquer à la mesure des dilatations la méthode légèrement modifiée qui lui avait servi à étudier la réfraction (2).

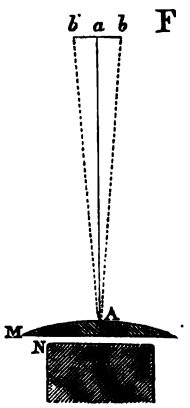
(1) H. Fizeau, *Recherches sur les modifications que subit la vitesse de la lumière dans le verre et plusieurs autres corps solides sous l'influence de la chaleur* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXVI; 1862).

(2) H. Fizeau, *Recherches sur la dilatation et la double réfraction du cristal de roche échauffé* (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. II; 1864).

Nous exposerons le principe de cette méthode très simple et extrêmement précise, qui a reçu, depuis lors, de multiples applications.

Considérons (*fig.* 42) un système composé d'une lentille plan convexe dont la face inférieure est placée à une petite distance

Fig. 42.



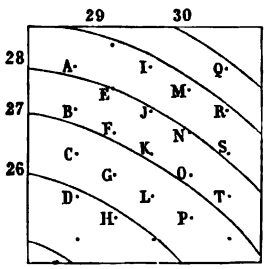
d'une surface plane réfléchissante. Supposons, dans le plan focal F, une source de lumière monochromatique *ab*, dont les rayons, après avoir traversé la face supérieure de la lentille, tombent sous une incidence à peu près normale sur les surfaces M et N ; l'image *ab'* de *ab* se forme dans le plan F. Les deux systèmes de rayons réfléchis sur les surfaces M et N interfèrent entre eux, et produisent des franges obscures suivant les lignes où la différence de marche des rayons est égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde. La position de ces lignes, analogues à des courbes de niveau, dépend de la forme et de la position relative des deux surfaces. Elles correspondent aux lignes d'égale épaisseur de l'espace compris entre ces dernières.

Supposons maintenant que l'une des surfaces se meuve parallèlement à elle-même. Les franges se déplaceront de même, et un mouvement égal à la distance de deux franges consécutives correspondra (la réflexion doublant le chemin parcouru) à un mouvement relatif des plans égal à une demi-longueur d'onde de la lumière monochromatique employée. La longueur d'onde moyenne

de la lumière de la soude dans l'air à 0° et sous la pression normale est de $0^{\mu},58930$ (¹). Dans l'emploi de cette lumière, un déplacement d'une frange correspond donc à un mouvement relatif des surfaces égal à $0^{\mu},29465$.

Pour estimer le déplacement relatif des surfaces M et N, on marque, sur le plan M, un certain nombre de points en quinconce (*fig.* 43), que l'on désigne par les lettres de l'alphabet, et l'on

Fig. 43.



estime la position de ces points par rapport aux franges, à chacune desquelles on donne un numéro d'ordre. Un déplacement des franges sera marqué par une nouvelle lecture de tous les points par rapport aux franges. Chaque lecture pouvant être faite à $\frac{1}{20}$ de frange près environ, le déplacement peut être estimé, dans de bonnes conditions, avec une précision voisine de $\frac{1}{100}$ de frange, correspondant à un mouvement relatif des surfaces inférieur à $0^{\mu},003$.

133. Description des appareils. — L'appareil servant à utiliser, pour la détermination des dilatations, la mesure des déplacements prodigieusement petits dont nous venons de parler, consiste en une plate-forme de métal (*fig.* 24, p. 130), percée en trois points situés près de la périphérie, de trous taraudés, dans lesquels passent des vis de même matière que la plate-forme, et

(¹) D'après les déterminations récentes de MM. Peirce, Müller et Kempf, Kurlbaum, Bell, Macé de Lépinay, la longueur d'onde moyenne de la lumière de la soude dans le vide est égale à $0^{\mu},58947$. [*Voir* la Note annexée au Mémoire de M. Benoît : *Nouvelles études et mesures de dilatations*, etc. (*T. et M.*, t. VI).]

qui supportent la lentille. Le corps à étudier est placé sur trois petites pointes relevées au burin dans la plate-forme.

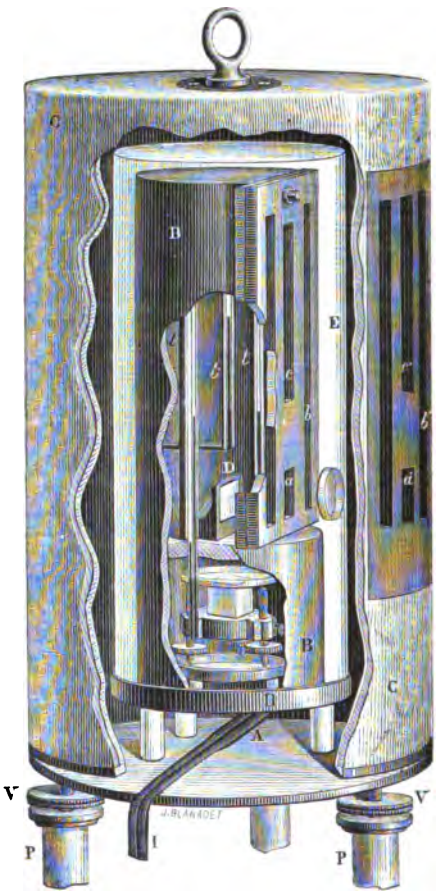
Dans l'appareil primitif de M. Fizeau, le trépied est recouvert

Fig. 44.

par une étuve B, portant deux thermomètres coudés et un prisme à réflexion totale D. Une cloche C en cuivre (*fig.* 44), percée d'une fenêtre E, protège la première étuve contre le refroidissement. Le tout est supporté par une plaque en cuivre A, placée

sur trois colonnes en porcelaine P, surmontées de vis de réglage V. Deux petites flammes de gaz servent à chauffer l'appareil, dont la température est réglée au moyen d'un thermorégulateur IT.

Fig. 45.



La lumière monochromatique est fournie par la source S. Le faisceau reçu par le prisme H est renvoyé sur le prisme D, d'où il tombe verticalement sur la lentille. Deux lunettes L et L′ servent à observer respectivement les thermomètres et les franges réfléchies par le prisme D.

La *fig.* 45 représente le nouveau dispositif adopté par M. Benoît. L'étuve B et la cloche C ont été convenablement élevées,

de manière à permettre l'emploi de thermomètres rectilignes, susceptibles d'être étudiés. La première étuve est entourée d'une cloche de verre E, munie d'un disque à faces parallèles pour les observations. Le but de cette cloche sera indiqué plus loin.

Les fenêtres a et a' servent à observer les franges ; b et b' sont destinées à la lecture des thermomètres t ; enfin on observe, à travers les fenêtres c et c', un petit thermomètre t', placé dans la partie supérieure de l'étuve. Les thermomètres sont à échelle fractionnée, des modèles 1b et 1c (p. 5) ; ils sont placés deux à deux de part et d'autre du trépied, et servent respectivement dans les intervalles [0 · 50] et [50 · 100].

Une grande caisse de zinc recouvre tout l'appareil, en laissant les ouvertures nécessaires aux observations ; elle est à doubles parois et peut être remplie de glace.

134. Expériences. — Le déplacement des franges que l'on observe dans les mesures au moyen du dilatomètre Fizeau est dû à la différence entre les dilatations du trépied et de l'échantillon à mesurer ; connaissant la première, on en déduit la quantité cherchée. C'est sur la valeur trouvée pour la dilatation du trépied que reposent toutes les déterminations faites au moyen de cet appareil. Cette constante doit donc être mesurée avec le plus grand soin, par la méthode qui sert aux autres mesures. Pour cela, on retourne les vis dans leurs écrous, de manière que la surface polie de la plate-forme soit du côté de la lentille. L'appareil étant réglé de manière que l'on voie les franges, les écrous qui sont fendus vers l'extérieur sont fortement serrés au moyen de petites vis latérales.

Pour que les mesures soient suffisamment précises, il est nécessaire que les longueurs sur lesquelles on opère soient de 10^{mm} au moins ; mais alors les observations présentent, dans la détermination de la dilatation du trépied, des difficultés particulières provenant de ce que les franges sont très peu intenses.

Il est une circonstance qui contribue beaucoup à diminuer les différences entre les maxima et minima d'éclat dans le faisceau de lumière que l'on observe. Les rayons, traversant sous diverses incidences l'espace compris entre la lentille et la plate-forme, éprouvent des retards différents et n'interfèrent pas tous de la

même manière avec les rayons réfléchis par la face inférieure de la lentille. Il en résulte que les franges empiètent les unes sur les autres et sont moins distinctes. Pour une distance donnée de deux points lumineux de la source, les franges produites par ces deux points sont complémentaires, et le champ est éclairé uniformément. Chaque fois que la largeur de la source dépasse cette distance, les observations deviennent impossibles ; elles sont incertaines déjà pour une distance beaucoup moindre. Un calcul très simple montre quelle est la largeur de la source lumineuse qu'il est possible d'employer dans chaque cas. Si, par exemple, la distance focale de la lentille est de 400^{mm}, et l'épaisseur de la lame d'air de 10^{mm}, les systèmes de franges émis par deux points lumineux distants de 1^{mm} empiètent l'un sur l'autre de $\frac{1}{10}$ de frange environ. Pour 2^{mm}, ils empiètent de $\frac{4}{10}$; enfin ils se croisent complètement pour $2^{mm},17$.

Pour obtenir une source lumineuse suffisamment restreinte, on dispose, devant le prisme H, un diaphragme percé d'une petite ouverture.

Il est nécessaire que les positions relatives de la source éclairante et de l'appareil restent absolument invariables dans toute une série de mesures, puisqu'un déplacement de la source modifie la position des franges. On s'assure que cette condition est remplie, en disposant la source lumineuse de manière que son image se forme dans le même plan, et que la source et son image soient exactement tangentes ; l'image peut être aisément observée au moyen d'une loupe.

Dans la mesure d'un échantillon quelconque, la lame d'air qui s'étend entre les surfaces M et N est mince, et les mesures sont beaucoup moins délicates.

Dans la mesure fondamentale ou dans l'étude d'un échantillon, le trépied étant disposé au centre de l'étuve et tout l'appareil étant réglé, on chauffe d'abord jusque vers 80°, de façon à chasser toute l'humidité; puis, lorsque la température est devenue bien constante, on fait la première observation. Abaissant alors le régulateur, on peut faire une seconde observation dix ou douze heures après. Les observations se succèdent ainsi, de douze en douze heures environ ; une série complète comprend de 25 à 30 observations pour un échantillon, et un beaucoup plus grand

nombre pour le trépied. Afin d'éliminer certaines erreurs constantes, ces observations sont réparties sur trois ou quatre séries de températures ascendantes et descendantes.

Il n'est pas nécessaire de suivre la marche des franges. Le nombre entier des franges qui passent peut être souvent calculé d'avance, les dilatations à mesurer étant connues approximativement. Dans les cas douteux, il suffit de compter une fois les franges qui passent entre deux températures ; dans la suite, on ne détermine plus que la fraction de frange. Le nombre entier peut être trouvé aussi par l'analyse indéterminée du premier degré.

La mesure d'une dilatation nécessite encore la détermination de l'épaisseur de l'échantillon sur lequel on opère et de la lame d'air comprise entre les surfaces M et N. L'épaisseur de l'échantillon est mesurée au sphéromètre. Pour mesurer l'épaisseur de la lame d'air, on place sur le trépied une plaque de verre plane et parallèle, d'épaisseur connue. On mesure alors, au sphéromètre, la distance entre la face supérieure de cette plaque et la face supérieure de l'échantillon, la plaque ayant été enlevée ; l'épaisseur cherchée se déduit de ces deux mesures. On connaît ainsi la longueur des vis qui participent à la dilatation, en ajoutant l'épaisseur de la lame d'air à celle de l'échantillon.

Pour la mesure de la dilatation du trépied, on détermine la distance entre la partie supérieure de la plaque de verre et la plate-forme.

135. Réductions et calcul. — Lorsque l'appareil est monté pour une détermination, il doit rester en repos jusqu'à ce que cette détermination soit terminée. Les thermomètres, une fois placés dans l'étuve, ne peuvent en être extraits que lorsqu'on veut préparer une nouvelle expérience. On ne peut donc déterminer le zéro qu'au commencement et à la fin d'une mesure. Sa position devra être calculée pour chaque expérience à l'aide de la Table des dépressions, c'est-à-dire par le procédé précédemment indiqué (p. 163). Il est donc nécessaire d'employer, pour ces mesures, des thermomètres dans lesquels l'état stable soit atteint rapidement.

La température étant mesurée au commencement et à la fin

d'une observation, qui ne dure, en général, que quelques minutes, on admet la moyenne des deux lectures.

Il nous reste à indiquer le calcul par lequel les allongements sont déduits de l'observation des franges.

Soient a_1, b_1, c_1, ... les pointés des points A, B, C, ... à la température t_1 ; a_2, b_2, c_2, ... ceux des mêmes points à la température t_2.

La moyenne des différences $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$, $c_1 - c_2$, ..., ou la différence de la moyenne des pointés, donne le déplacement des franges entre t_1 et t_2. En désignant par f' le *pointé moyen*, c'est-à-dire la moyenne des p pointés faits à une même température, on aura

$$f'_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots}{p},$$

$$f'_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + \ldots}{p},$$

.....

Le pointé doit subir une correction pour la variation de l'indice de l'air.

Soient l_1 l'épaisseur de la lame d'air (dans le cas de la mesure de la dilatation du trépied, la longueur des vis) et λ_1 la longueur d'onde de la lumière jaune dans les conditions de l'expérience ; les rayons interférents ont une différence de marche m_1, et

$$l_1 = m_1 \frac{\lambda_1}{2}.$$

Cette observation doit être réduite à des conditions que l'on adopte comme normales pour tous les pointés, par exemple à 0° et à la pression de 760^{mm}. Si la longueur d'onde dans ces conditions est égale à λ_0 et la différence de marche à m_0, on aura

$$l_1 = m_0 \frac{\lambda_0}{2}.$$

La différence $m_0 - m_1 = f_1 - f'_1$ représente la correction à faire subir au pointé moyen f'_1. Or, si n_0 et n_1 représentent les indices de réfraction de l'air dans les conditions normales et dans les conditions de l'expérience, on sait que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{n_0}{n_1}.$$

Les relations précédentes donnent

$$f_1 = f_1' + \frac{2l_1}{\lambda_0}\,\frac{n_0 - n_1}{n_0},$$

ou, en désignant par λ la longueur d'onde dans le vide,

$$f_1 = f_1' + \frac{2l_1}{\lambda}(n_0 - n_1),$$

puisque

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{n_0}.$$

Or, si l'on désigne par δ le coefficient de variation de la quantité $n_0 - 1$ avec la température, on aura

$$n_1 - 1 = (n_0 - 1)\,\frac{1}{1 + \delta t_1}\,\frac{H_1}{760},$$

et, pour la réduction à 0° et à la pression normale, d'une observation faite à la température t_1 et sous la pression H_1,

$$f_1 = f_1' + \frac{2l_1}{\lambda}\left[n_0 - 1 - (n_1 - 1)\right];$$

d'où

$$f_1 = f_1' + \frac{2l_1}{\lambda}(n_0 - 1)\left[1 - \frac{1}{1 + \delta t_1}\,\frac{H_1}{760}\right].$$

Variation de l'indice de réfraction de l'air. — Les expériences antérieures à celles de M. Benoît n'avaient pas encore fourni, sur la variation de l'indice de l'air avec la température, des données suffisamment exactes pour permettre de réduire avec certitude les observations relatives à la dilatation du trépied de l'appareil Fizeau. C'est pour cela que M. Benoît entreprit de déterminer cette quantité au moyen de l'appareil lui-même. La première étuve fut recouverte par la cloche en verre dont nous avons parlé, et deux séries de mesures corrélatives furent entreprises, l'une sous la pression atmosphérique, l'autre sous une pression voisine de zéro. A chaque température, les franges étaient déplacées, entre les deux mesures, d'une quantité correspondante à la variation de vitesse de la lumière dans le vide et dans l'air. M. Benoît fit en tout quatre-vingt-trois observations complètes à des températures comprises entre 0° et 80°. La série dans le vide

servit à déterminer la dilatation du trépied, tandis que les mesures dans l'air donnèrent, pour chaque température, les corrections à faire subir aux pointés pour les réduire au vide.

Les deux séries furent calculées séparément et représentées par deux fonctions paraboliques, desquelles on déduisit, par un calcul particulier, la valeur de l'indice de réfraction de l'air à 0° et son coefficient de variation.

D'après ces mesures, l'indice de réfraction de l'air à 0° et sous la pression de 760^{mm} est

$$n_0 = 1,0002923,$$

et le coefficient de variation δ de la formule

$$\frac{n-1}{n_0-1} = \frac{1}{1+\delta t}$$

est égal à 0,003665, c'est-à-dire identique au coefficient de dilatation de l'air. On sait, d'ailleurs, d'après les recherches de M. Mascart, que la variation de l'indice avec la pression est proportionnelle à la densité du gaz. La réfraction de l'air varie donc, dans tous les cas, comme sa densité.

Les formules précédentes deviennent

$$f_1 = f_1' + \frac{2l_1}{\lambda}\,0,0002923\left[1 - \frac{1}{1+0,003665\,t_1}\,\frac{H_1}{760}\right].$$

Or, par une circonstance fortuite, les valeurs numériques des quantités $n_0 - 1$ pour l'air et $\frac{\lambda}{2}$ pour la lumière de la soude sont presque identiques; de plus, dans l'étude d'un échantillon, la correction n'atteint jamais $\frac{2}{100}$ de frange; on peut donc écrire, avec une approximation supérieure à celle avec laquelle les corrections doivent être appliquées,

$$f_1 = f_1' + l_1\left[1 - \frac{1}{1+0,003665\,t_1}\,\frac{H_1}{760}\right].$$

Cette simplification ne serait pas permise dans la réduction des mesures relatives au trépied, dans lesquelles la correction dépasse généralement deux franges aux températures élevées.

Calcul de la dilatation. — Occupons-nous d'abord de la dilatation du trépied. Supposons un pointé fait à 0°, et les pointés

réduits à des conditions normales, auxquelles correspond la longueur d'onde λ. Nous aurons, en désignant par C une constante inconnue,

$$l_0 = C + f_0 \frac{\lambda}{2},$$

$$l_1 = C + f_1 \frac{\lambda}{2},$$

$$l_2 = C + f_2 \frac{\lambda}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Posons

$$l_t = l_0(1 + \alpha t + \beta t^2).$$

Nous aurons

$$f_1 \frac{\lambda}{2} = f_0 \frac{\lambda}{2} + l_0 \alpha t_1 + l_0 \beta t_1^2$$

ou

$$f_1 = f_0 + \frac{2 l_0}{\lambda} \alpha t_1 + \frac{2 l_0}{\lambda} \beta t_1^2, \quad \ldots,$$

Adoptons, pour la symétrie des calculs, les notations suivantes :

$$f_0 = x,$$

$$\frac{2 l_0}{\lambda} \alpha = y,$$

$$\frac{2 l_0}{\lambda} \beta = z.$$

Les équations de condition prennent la forme

$$x + t_1 y + t_1^2 z = f_1,$$
$$x + t_2 y + t_2^2 z = f_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

elles sont identiques à celles que nous avons rencontrées dans le calcul des dilatations déterminées au comparateur. Après avoir résolu les équations normales, on calculera α et β, connaissant y, z, l_0 et λ.

Soit maintenant à déterminer la dilatation d'un échantillon. Pour éviter toute ambiguïté, désignons, dans ce cas, par L_0, L_1, L_2, ..., E_0, E_1, E_2, ... les longueurs communes des trois vis et les épaisseurs de l'échantillon aux températures o, t_1, t_2, ...; soient enfin e_0, e_1, e_2, ... les épaisseurs correspondantes de la lame

d'air. Nous aurons

$$e_0 = L_0 - E_0 = C + f_0 \frac{\lambda}{2},$$

$$e_1 = L_1 - E_1 = C + f_1 \frac{\lambda}{2},$$

$$e_2 = L_2 - E_2 = C + f_2 \frac{\lambda}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En désignant par α' et β' les coefficients de la formule représentant la dilatation de l'échantillon, nous aurons, en introduisant les valeurs de L_1 et E_1 dans l'expression de e_1,

$$f_0 \frac{\lambda}{2} + (L_0\alpha - E_0\alpha')t_1 + (L_0\beta - E_0\beta')t_1^2 = f_1 \frac{\lambda}{2}$$

ou

$$f_0 + \frac{2(L_0\alpha - E_0\alpha')}{\lambda} t_1 + \frac{2(L_0\beta - E_0\beta')}{\lambda} t_1^2 = f_1.$$

Posons

$$f_0 = x,$$

$$\frac{2(L_0\alpha - E_0\alpha')}{\lambda} = y,$$

$$\frac{2(L_0\beta - E_0\beta')}{\lambda} = z;$$

les équations de condition prennent alors la forme ordinaire. On en tire, après avoir résolu le système,

$$\alpha' = \frac{L_0\alpha - y\frac{\lambda}{2}}{E_0}, \qquad \beta' = \frac{L_0\beta - z\frac{\lambda}{2}}{E_0}.$$

136. Exactitude atteinte dans les mesures de dilatation. — Les mesures de dilatation sont affectées de nombreuses causes d'erreurs. Dans toutes les méthodes qu'il est possible d'imaginer, le manque de constance ou d'uniformité de la température entraîne quelque incertitude dans son évaluation; même dans des expériences bien préparées et exécutées avec soin, il n'est pas rare que cette incertitude atteigne deux ou trois centièmes de degré. Lorsqu'on emploie de bons thermomètres, les erreurs de leurs lectures et de leurs corrections ne doivent pas dépasser quelques millièmes de degré et sont actuellement négligeables.

En dehors des causes d'incertitude communes à toutes les méthodes, les deux procédés que nous avons décrits contiennent des erreurs qui leur sont propres, et dont nous allons examiner les principales.

Dans les mesures au comparateur, les erreurs des pointés, augmentées par les déplacements apparents des traits dus à de légers mouvements de la surface de l'eau ou à des courants d'air chargé de vapeur d'eau peuvent atteindre fréquemment 1^{μ}. Cependant, comme une série complète comprend un certain nombre de mesures, l'erreur résiduelle d'une série dépasse rarement $0^{\mu},5$ ou $0^{\mu},7$. Si la mesure complète de la dilatation comprend un nombre suffisant de séries *indépendantes,* cette erreur résiduelle donne une idée assez exacte de l'erreur fortuite de la série, augmentée de l'incertitude qui règne sur les corrections des micromètres. C'est de là que l'on déduit l'erreur probable du résultat.

Il peut, en outre, subsister, dans les mesures, une erreur constante, provenant de la tare du micromètre, c'est-à-dire de la valeur d'un tour de la vis en mesures absolues. L'incertitude du millimètre étalon employé à cette détermination s'ajoute encore à l'erreur des mesures, et reste en entier dans le résultat, quelle que soit son erreur probable. Cette dernière donnera donc un point de départ pour l'évaluation de l'incertitude qui règne dans la différence de deux coefficients mesurés avec le même appareil.

Pour une règle métrique en platine, on peut rendre l'erreur probable d'un coefficient moyen, $\alpha + \beta t$, inférieure à $\frac{1}{3000}$ ou même à $\frac{1}{4000}$ de sa valeur, pour tout l'intervalle de 40 degrés environ, dans lequel on opère d'ordinaire. Mais, si on limite à $\frac{1}{1000}$ environ la précision que l'on peut véritablement garantir par des expériences de premier ordre, on se trouvera certainement plus près de la vérité.

Dans l'emploi de la méthode Fizeau, les erreurs relatives des mesures individuelles faites sur un échantillon avec une faible différence de marche sont moindres qu'avec le comparateur ; en effet, l'erreur résiduelle d'une série atteint rarement 0,03 frange ou $0^{\mu},01$. Les échantillons à étudier ayant une épaisseur de 13^{mm} à 15^{mm}, et les expériences pouvant être poussées sans difficultés jusque vers 80°, on se trouve dans des conditions environ deux fois plus favorables que dans les mesures au comparateur de 1^{m}.

Il est aisé de voir du reste que l'exactitude avec laquelle on isole la part de chaque terme de la formule parabolique est proportionnelle au carré de l'intervalle de température dans lequel on opère.

Mais toutes les mesures dépendent de la détermination de la constante relative au trépied. Comme nous l'avons vu, cette détermination est plus difficile et sensiblement moins précise que celle d'un échantillon. Dans la mesure faite par M. Benoît, l'erreur probable minima du coefficient moyen est égale à $\frac{1}{4000}$ environ de ce coefficient. Les erreurs probables des mesures relatives à divers échantillons ne sont pas sensiblement plus fortes. Dans ce cas, l'incertitude de la différence de deux coefficients déterminés avec le même trépied est inférieure à celle que l'on calculerait d'après les erreurs probables relatives à deux échantillons.

L'erreur constante la plus forte, que l'on peut commettre dans ces mesures, et particulièrement dans celle du trépied, se rapporte à la valeur du millimètre employé pour les mesures, en fonction de la longueur d'onde de la raie D. Les lois physiques simples sur lesquelles repose l'emploi de la méthode sont probablement assez exactes pour n'introduire aucune erreur appréciable.

D'après M. Benoît, l'approximation réelle atteinte dans ses déterminations est de l'ordre de $\frac{1}{1200}$ à $\frac{1}{1500}$.

Afin d'épargner à d'autres observateurs le travail long et très fatigant que nécessite une mesure directe de la dilatation d'un trépied, M. Benoît a déterminé la dilatation du quartz, du béryl et du spath d'Islande parallèlement et perpendiculairement à leur axe (*voir* Table XII). On peut maintenant, à l'aide de ces cristaux, déterminer la dilatation d'un trépied, par une mesure relative, qui peut être faite aisément et sans fatigue. Ce procédé pourra être utilisé avec avantage, jusqu'à l'époque où des progrès importants auront montré la nécessité de nouvelles mesures absolues.

NOTES.

I. — Sur l'unité absolue de pression (*voir* note, p. 15).

L'unité absolue de pression, dans le système C.G.S., est la dyne par centimètre carré ; l'unité pratique dans ce système est un million de fois plus forte. Nous pouvons calculer sa valeur approximative, en hauteur mercurielle dans les conditions normales.

D'après une détermination récente de M. le commandant Defforges, la valeur de g à l'Observatoire de Paris est égale à $980{,}96 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$. En réduisant cette valeur à la latitude de 45° et au niveau de la mer (*voir* p. 30 et Table III), on trouve

$$g_{45;0} = 980{,}63 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

En admettant provisoirement, faute de données précises sur ce point, que la densité de l'eau (rapport de la masse au volume) soit égale à l'unité, la densité absolue du mercure à 0° sera égale à 13,5956. La pression exercée sur 1^{cm^2} par une colonne du mercure de 1^{cm} de hauteur située à 45° et au niveau de la mer sera de 13332,25 dynes. La pression d'une mégadyne sera donc donnée par une colonne de $750^{\text{mm}},06$ (A Paris, on aurait 13336,74 dynes, et $749^{\text{mm}},81$). En adoptant provisoirement, comme unité pratique de pression dans le système C.G.S., celle qui est donnée par une colonne de mercure de $750^{\text{mm}},00$, on commettrait une erreur inférieure à l'incertitude qui règne encore sur les éléments du calcul.

On peut espérer que la densité de l'eau sera déterminée de nouveau dans un avenir prochain, avec une précision voisine de un cent-millième. Il y aura peut-être lieu alors d'adopter, pour toute la métrologie, et, en particulier, pour la thermométrie, une nouvelle unité de pression qui sera ou bien aussi voisine que possible de la mégadyne par centimètre carré, ou bien donnée par une colonne mercurielle de 750^{mm} de hauteur. Dans l'adoption de cette unité, il ne faudrait pas perdre de vue le fait qu'il est souvent avantageux de s'écarter légèrement de la valeur la plus probable d'une unité dérivée, si l'on gagne, de cette manière, une unité pratique facile à retrouver.

II. — Sur la compressibilité du mercure et du verre (*voir* p. 33 et 103).

Une détermination très précise de la compressibilité du mercure, faite récemment par M. Amagat [1], a donné

$$\varkappa = 3,92.10^{-6}$$

par atmosphère. Cette valeur est sans doute la plus exacte de celles que l'on possède pour cette constante.

M. Amagat a trouvé, pour les compressibilités relatives du mercure et du verre ou du cristal durs, les constantes suivantes, rapportées à la pression d'une atmosphère,

$$\varkappa_m - \varkappa_v = 1,71.10^{-6},$$
$$\varkappa_m - \varkappa_c = 1,51.10^{-6},$$

ce qui réduirait la correction $\beta_t - \beta_e$, exprimée dans les unités adoptées précédemment, à $14,5.10^{-6}$ et $12,9.10^{-6}$.

Ces nombres devront sans doute subir encore une petite correction lorsque la dilatation relative du mercure et du verre aura été déterminée avec précision pour un intervalle de température étendu.

III. — Sur le verre normal allemand (*voir* p. 147).

Le verre adopté actuellement en Allemagne comme *verre normal* pour la thermométrie est celui qui porte le numéro XVI^{III} (désigné plus récemment par 16III; *voir* page 159); c'est à ce verre que se rapportent les résultats donnés (p. 147) comme étant relatifs au verre XVIII^{III}. Le verre XVI^{III} porte, comme marque distinctive, un mince filet rouge violet qui règne parallèlement à l'axe des tubes, tout près de leur surface.

D'après M. Böttcher [2], la position du zéro pour les thermomètres construits avec ce verre est donnée par la formule

$$z_t = z_0 - 0,00071\,t + 0,0000008\,t^2.$$

IV. — Sur la résistance du verre à l'attaque de l'eau.

Dans le choix d'un verre pour la construction des thermomètres, baromètres, niveaux, lentilles, etc., il est important de prendre en considé-

---

(1) Amagat, *Compressibilité du mercure et élasticité du verre* (*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 228; 4 février 1889).

(2) A. Böttcher, *Ueber den Gang der Eispunktsdepressionen* (*Zeitschrift für Instrumentenkunde*, t. VIII, p. 409; décembre 1888).

ration les détoriations que peut éprouver la surface du verre sous l'influence de divers agents chimiques, de l'eau chaude ou froide, ou de la vapeur d'eau.

On a reconnu que l'attaque de la surface est produite en grande partie par la dissolution des alcalis, et surtout de la potasse par l'eau ou la vapeur absorbée.

M. Schott (1) attribue à l'eau attirée dans l'intérieur du verre et chassée violemment en vapeur les fêlures qui se produisent fréquemment dans le verre exposé à l'humidité, et chauffé ensuite, même avec précaution, dans un bain d'air à température élevée.

En examinant divers échantillons de verre chauffé dans l'eau pendant plusieurs jours, puis séchés et chauffés jusque vers 150°, M. Schott a constaté des détériorations d'autant plus marquées que le verre contenait une plus forte proportion de potasse. Les verres à la soude étaient à peine attaqués, tandis que certains verres à la potasse se fendillaient ou perdaient de petites écailles. Des verres contenant de 33 à 42 pour 100 de potasse étaient complètement détériorés après un séjour de plusieurs semaines à l'air.

M. R. Weber, de Berlin, a proposé une méthode d'examen du verre qui consiste à exposer les échantillons pendant une journée à des vapeurs d'acide chlorhydrique et à les abandonner ensuite à l'air. Le verre se couvre d'une couche blanchâtre d'autant plus opaque qu'il a été plus attaqué.

Tout récemment, M. Mylius (2) a employé le procédé suivant : On introduit une solution aqueuse d'éther dans une éprouvette faite avec le verre à examiner, puis on ajoute à la solution de l'éosine ($C^{20}H^{8}I^{2}O^{5}$ notation atomique), qui produit, avec les hydrates alcalins, un sel coloré en rouge, en quantité proportionnelle à la détérioration du verre. D'après l'auteur, cette méthode serait plus facile à appliquer que celle de M. Weber.

D'après M. Warburg (3), on peut rendre le verre inattaquable par l'eau sur une de ses faces, en le recouvrant d'une couche de silice par l'électrolyse du verre lui-même. Les deux électrodes étant formées par du mercure, on chauffe le tout vers 300°, et l'on établit, sur les deux faces, une différence de potentiel assez forte (50 à 100 volts). L'une des faces gagne alors de la silice, tandis que l'autre devient plus riche en alcalis.

On a reconnu que l'eau distillée conservée dans des flacons de verre est faiblement électrolytique ; elle l'est d'autant plus qu'elle a été en contact avec du verre plus riche en alcalis.

---

(1) O. Schott, *Ueber das Eindringen von Wasser in die Glasoberfläche* (*Zeitschrift f. Inst.*, t. IX, p. 86; mars 1889).

(2) Mylius, *Die Prüfung der Oberfläche des Glases durch Farbreaktion* (*Zeitschrift für Inst.*, t. IX, p. 50; février 1889.)

(3) E. Warburg, *Ueber die Electrolyse des festen Glases* (*Wied. Ann.*, t. XXI, p. 622; 1884).

V. — Sur la dilatation du mercure et du verre (*voir* p. 271).

Les divergences qui existent entre les résultats des expériences directes sur la dilatation du mercure et du verre, et ceux que l'on peut déduire des comparaisons des thermomètres montrent, soit que les résultats de certaines mesures directes sont très peu exacts, soit que les suppositions sur lesquelles se fonde notre calcul ne sont pas permises. Il est donc utile d'examiner de plus près ces hypothèses.

D'abord, nous avons réduit toutes les formules à ce qu'elles devraient être si les véritables fonctions qui représentent les dilatations thermiques étaient du second degré. Cette supposition est assurément inexacte, comme le montre la théorie du thermomètre ; mais il serait illusoire, dans l'état actuel des mesures, de chercher à représenter les observations relatives à la dilatation des solides par des formules d'un degré supérieur au second. Le terme du troisième degré serait de beaucoup inférieur à son erreur probable.

De plus, nous avons extrapolé, jusqu'à 100°, les résultats des mesures de M. Benoît sur la dilatation du verre, mesures faites entre 0° et 40°.

La première hypothèse nous a obligé à fausser la formule représentant les différences entre les thermomètres à mercure et le thermomètre à hydrogène, afin de faire disparaître les termes dus aux puissances supérieures de la température dans les formules de dilatation encore inconnues. Il est aisé de voir que, en n'annulant pas les différences $p' - P_\nu$, $q' - Q_\nu$ au profit de $n' - N_\nu$, nous aurions trouvé, pour cette dernière quantité, une valeur presque triple de celle que nous a donnée le calcul.

Pour la dilatation du mercure, nous avons réduit à une fonction du second degré la formule du troisième degré déduite par M. Broch des expériences de Regnault. Ces expériences, faites entre la température ambiante et 300°, ont donné, par rapport à la fonction du troisième degré, des erreurs résiduelles dépassant 100$^\mu$ par mètre. La formule que nous avons adoptée concorde avec celle de M. Broch à 2$^\mu$ près entre 0° et 100° ; dans tout l'intervalle pour lequel nous avons opéré la réduction, ces formules sont donc pratiquement identiques.

Les deux formules suivantes

$$V_T = V_0[1 + (181230 + 9,539T)10^{-9}T],$$
$$V_T = V_0[1 + (180528 + 14,221T)10^{-9}T]$$

ont été calculées de manière à concorder respectivement le mieux possible [1] avec celle de M. Broch entre 0° et 200°, 0° et 300°. Les diver-

[1] La formule adoptée précédemment avait été, de plus, rapportée à l'échelle normale; comme il est certain que, aux températures supérieures à 100°, les thermomètres à air et à hydrogène concordent de très près, on peut considérer les formules ci-dessus comme se rapportant à l'échelle normale.

gences pour la dilatation de 1^m atteignent respectivement 19^μ et 63^μ au maximum ; en moyenne, elles sont de beaucoup inférieures aux erreurs des mesures de Regnault. On n'augmente donc pas beaucoup les erreurs des expériences, en substituant, à la formule du troisième degré, une des formules qui précèdent.

Laquelle de ces formules faut-il admettre de préférence ? La dernière correspond certainement mieux à l'ensemble des mesures de Regnault que la formule adoptée dans nos calculs ; mais elle concorde beaucoup moins bien, entre 0° et 100°, avec la formule du troisième degré. Il se présente là une question délicate, qu'il est impossible de trancher sans de nouvelles expériences.

En adoptant la dernière formule, nous aurions trouvé, par le calcul direct,

$$n' - N_v = -9,78.10^{-9},$$

tandis que la valeur déduite de la théorie du thermomètre n'aurait pas été sensiblement modifiée. La divergence serait ainsi beaucoup diminuée.

Il est hors de doute que la théorie du thermomètre donne, pour la relation qui existe entre les coefficients des termes du second degré, des résultats beaucoup plus voisins de la réalité que la mesure directe. Il faut donc admettre que la dilatation du verre varie moins fortement, ou que la dilatation du mercure varie plus fortement qu'on ne l'avait pensé.

Une étude expérimentale de la question, faite par de nouvelles méthodes et à l'aide des appareils très précis que l'on possède aujourd'hui, montrerait sans doute les causes des divergences trouvées.

Le thermomètre à poids fournit les moyens de déterminer la dilatation apparente du mercure dans le verre entre deux températures quelconques, par exemple 0° et 100°. Les comparaisons déjà faites entre les thermomètres à mercure et le thermomètre à hydrogène donneraient alors, par un calcul très simple, cette dilatation pour les autres températures.

TABLE I.

Corrections pour la réduction à 0° des hauteurs barométriques observées sur une échelle en laiton.

L'unité est le millimètre. — (D'après M. Broch.)

TEMPÉRATURES.	HAUTEURS BAROMÉTRIQUES EN MILLIMÈTRES.										TEMPÉRATURES.
	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	
°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	°
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0
1	0,114	0,116	0,118	0,119	0,121	0,123	0,124	0,126	0,128	0,129	1
2	0,229	0,232	0,235	0,239	0,242	0,245	0,249	0,255	0,258	0,262	2
3	0,343	0,348	0,353	0,358	0,363	0,368	0,373	0,378	0,383	0,387	3
4	0,458	0,464	0,471	0,477	0,484	0,490	0,497	0,503	0,510	0,517	4
5	0,572	0,580	0,588	0,596	0,605	0,613	0,621	0,629	0,637	0,645	5
6	0,686	0,696	0,706	0,716	0,725	0,735	0,745	0,755	0,765	0,774	6
7	0,800	0,812	0,823	0,835	0,846	0,858	0,869	0,880	0,892	0,903	7
8	0,914	0,928	0,941	0,954	0,967	0,980	0,993	1,006	1,019	1,032	8
9	1,029	1,043	1,058	1,073	0,087	1,102	0,117	1,131	1,146	1,161	9
10	1,143	1,159	1,175	1,192	0,208	1,224	1,241	1,257	1,273	1,290	10
11	1,257	1,275	1,292	1,310	1,328	1,346	1,364	1,382	1,400	1,418	11
12	1,371	1,390	1,410	1,429	1,449	1,468	1,488	1,508	1,527	1,547	12
13	1,484	1,506	1,527	1,548	1,569	1,590	1,612	1,633	1,654	1,675	13
14	1,598	1,621	1,644	1,667	1,690	1,712	1,735	1,758	1,781	1,804	14
15	1,712	1,736	1,761	1,785	1,810	1,834	1,859	1,883	1,908	1,932	15
16	1,826	1,852	1,878	1,904	1,930	1,956	1,982	2,008	2,034	2,060	16
17	1,939	1,967	1,995	2,023	2,050	2,078	2,106	2,133	2,161	2,189	17
18	2,053	2,082	2,112	2,141	2,170	2,200	2,229	2,258	2,288	2,317	18
19	2,167	2,198	2,229	2,260	2,290	2,321	2,352	2,383	2,414	2,445	19
20	2,280	2,313	2,345	2,378	2,410	2,443	2,476	2,508	2,541	2,573	20
21	2,394	2,428	2,462	2,496	2,530	2,565	2,599	2,633	2,667	2,701	21
22	2,507	2,543	2,579	2,615	2,650	2,686	2,722	2,758	2,794	2,829	22
23	2,621	2,658	2,695	2,733	2,770	2,808	2,845	2,883	2,920	3,957	23
24	2,734	2,773	2,812	2,851	2,890	2,929	2,968	3,007	3,046	3,085	24
25	2,847	2,888	2,929	2,969	3,010	3,051	3,091	3,132	3,173	3,213	25
26	2,960	3,003	3,045	3,087	3,130	3,172	3,214	3,256	3,299	3,341	26
27	3,074	3,118	3,161	3,205	3,249	3,293	3,337	3,381	3,425	3,469	27
28	3,187	3,232	3,278	3,323	3,369	3,414	3,460	3,505	3,551	3,597	28
29	3,300	3,347	3,394	3,441	3,488	3,536	3,583	3,630	3,677	3,724	29
30	3,413	3,462	3,510	2,559	3,608	3,657	3,705	3,754	3,803	3,852	30
31	3,526	3,576	3,627	3,677	3,727	3,778	3,828	3,879	3,929	3,979	31
32	3,639	3,691	3,743	3,795	3,847	3,899	3,951	4,003	4,055	4,107	32
33	3,752	3,805	3,859	3,913	3,966	4,020	4,073	4,127	4,181	4,234	33
34	3,865	3,920	3,975	4,030	4,086	4,141	4,196	4,251	4,306	4,362	34
35	3,978	4,034	4,091	4,148	4,205	4,262	4,318	4,375	4,432	4,489	35
	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	

TABLE II.

Corrections pour la réduction à 0° des hauteurs barométriques observées sur une échelle en verre dur.

L'unité est le millimètre. — [Argument $(173215 + 13,7T)10^{-9}$.]

TEMPÉRATURES.	HAUTEURS BAROMÉTRIQUES EN MILLIMÈTRES.										TEMPÉRATURES.
	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	
°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	°
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0
1	0,121	0,123	0,125	0,126	0,128	0,130	0,132	0,133	0,135	0,137	1
2	0,243	0,246	0,249	0,253	0,256	0,260	0,263	0,267	0,270	0,274	2
3	0,364	0,369	0,374	0,379	0,385	0,390	0,395	0,400	0,405	0,411	3
4	0,485	0,492	0,499	0,506	0,513	0,520	0,527	0,534	0,541	0,547	4
5	0,606	0,615	0,624	0,632	0,641	0,650	0,658	0,667	0,676	0,684	5
6	0,728	0,738	0,749	0,759	0,769	0,780	0,790	0,801	0,811	0,821	6
7	0,849	0,861	0,873	0,886	0,898	0,910	0,922	0,934	0,946	0,958	7
8	0,971	0,984	0,998	1,012	1,026	1,040	1,054	1,068	1,082	1,095	8
9	1,092	1,108	1,123	1,139	1,154	1,170	1,186	1,201	1,217	1,232	9
10	1,213	1,231	1,248	1,265	1,283	1,300	1,317	1,335	1,352	1,369	10
11	1,334	1,354	1,373	1,392	1,411	1,430	1,449	1,469	1,487	1,506	11
12	1,456	1,477	1,498	1,518	1,540	1,560	1,581	1,602	1,623	1,643	12
13	1,577	1,601	1,623	1,645	1,668	1,690	1,713	1,736	1,758	1,780	13
14	1,699	1,724	1,748	1,772	1,797	1,821	1,845	1,870	1,893	1,918	14
15	1,821	1,847	1,873	1,899	1,925	1,951	1,977	2,003	2,029	2,055	15
16	1,942	1,971	1,998	2,026	2,054	2,081	2,109	2,137	2,164	2,192	16
17	2,064	2,094	2,123	2,152	2,182	2,211	2,241	2,271	2,300	2,329	17
18	2,186	2,217	2,248	2,279	2,311	2,341	2,373	2,405	2,435	2,466	18
19	2,307	2,341	2,373	2,406	2,439	2,472	2,505	2,538	2,571	2,604	19
20	2,429	2,464	2,498	2,533	2,568	2,602	2,637	2,672	2,706	2,741	20
21	2,551	2,587	2,623	2,660	2,697	2,732	2,769	2,806	2,842	2,878	21
22	2,672	2,711	2,748	2,787	2,825	2,863	2,901	2,940	2,977	3,016	22
23	2,794	2,834	2,874	2,914	2,954	2,993	3,033	3,074	3,113	3,153	23
24	2,916	2,957	2,999	3,041	3,082	3,124	3,166	3,208	3,249	3,291	24
25	3,037	3,081	3,124	3,167	3,211	3,254	3,298	3,341	3,384	3,428	25
26	3,159	3,204	3,249	3,294	3,340	3,385	3,430	3,475	3,520	3,565	26
27	3,281	3,328	3,374	3,421	3,468	3,515	3,562	3,609	3,656	3,703	27
28	3,403	3,451	3,500	3,548	3,597	3,646	3,694	3,743	3,792	3,841	28
29	3,524	3,575	3,625	3,675	3,725	3,776	3,827	3,877	3,927	3,977	29
30	3,646	3,698	3,750	3,802	3,854	3,907	3,959	4,011	4,063	4,115	30
31	3,768	3,822	3,875	3,929	3,983	4,037	4,091	4,145	4,199	4,253	31
32	3,890	3,945	4,000	4,056	4,112	4,168	4,223	4,279	4,334	4,390	32
33	4,012	4,069	4,125	4,183	4,241	4,298	4,356	4,413	4,470	4,528	33
34	4,134	4,192	4,251	4,310	4,370	4,429	4,488	4,547	4,606	4,666	34
35	4,256	4,316	4,377	4,438	4,499	4,559	4,620	4,681	4,741	4,803	35
	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	

TABLE III.

Valeurs du rapport $\frac{g_\varphi}{g_{45}} = 1 - 0{,}00259 \cos 2\varphi$.

(*Voir* p. 30.)

DEGRÉS DE LATITUDE.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	DEGRÉS DE LATITUDE.
0	0,997 4100	4116	4163	4242	4352	4493	4666	4869	5103	5368	0
10	5662	5986	6339	6721	7132	7570	8036	8528	9046	9591	10
20	0,998 0159	0753	1369	2008	2670	3352	4054	4777	5517	6275	20
30	7050	7841	8646	9466	*0298	*1142	*1997	*2861	*3734	*4615	30
40	0,999 5503	6395	7293	8193	9096	*0000	*0904	*1807	*2707	*3605	40
50	1,000 4497	5385	6266	7139	8003	8858	9702	*0534	*1354	*2159	50
60	1,001 2950	3725	4483	5223	5946	6648	7330	7992	8631	9247	60
70	1,001 9811	*0409	*0954	*1472	1964	*2430	*2868	3279	*3661	*4014	70
80	1,002 4338	4632	4897	5131	5334	5507	5648	5758	5837	5884	80
90	1,002 5900										90
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Valeurs du rapport $\frac{g_{\varphi,M}}{g_{45,0}}$ pour divers lieux.

PARIS, *Observatoire*	1,000 3310
BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES	1,000 3322
LONDRES, *Standard Office*	1,000 5815
BRUXELLES, *Laboratoire du Musée*	1,000 5110
LA HAYE	1,000 6339
MUNICH	1,000 1798
BERLIN	1,000 6625
COPENHAGUE	1,000 9417
CHRISTIANIA, *Observatoire*	1,001 2840
STOCKHOLM, *Académie des Sciences*	1,001 2385
SAINT-PÉTERSBOURG, *Observatoire central*	1,001 2798
VIENNE, *Institut polytechnique*	1,000 2530
BERNE	1,000 0697
ROME, *Saint-Pierre*	0,999 7146
NAPLES, *Université*	0,999 6164
» *Observatoire de Capodimonte*	0,999 5984
» *Observatoire du Vésuve*	0,999 5086
MADRID, *Observatoire*	0,999 4560

TABLE IV.

Dépression capillaire d'un ménisque de mercure.

(D'après M. Mendeleieff et Mlle Gutkowska.)

DIAMÈTRE du tube.	HAUTEUR DU MÉNISQUE EN MILLIMÈTRES.								DIAMÈTRE du tube.
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
4mm	0,83mm	1,22mm	1,54mm	1,98mm	2,37mm				4mm
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80mm			5
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43mm		6
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13mm	7
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77	8
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52	9
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37	10
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27	11
12			0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19	12
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14	13
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	

TABLE V.

Températures d'ébullition de l'eau pure sous différentes pressions.

(D'après les expériences de Regnault calculées par M. Broch.)

PRESSIONS en millimètres.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PRESSIONS en millimètres.
500	88°,6985	7506	8027	8546	9065	9583	*0100	*0616	*1132	*1646	500
510	89,2160	2673	3185	3696	4206	4716	5225	5732	6239	6745	510
520	7251	7755	8259	8762	9265	9766	*0266	*0766	1265	*1763	520
530	90,2261	2757	3253	3748	4243	4736	5229	5721	6212	6702	530
540	7192	7681	8169	8656	9143	9629	*0114	*0598	*1082	*1665	540
550	91,2047	2528	3009	3489	3969	4447	4925	5402	5878	6354	550
560	6829	7303	7777	8250	8722	9193	9664	*0134	*0603	*1072	560
570	92,1540	2007	2474	2940	3405	3869	4333	4796	5259	5721	570
580	6182	6642	7102	7561	8020	8478	8935	9392	9848	*0303	580
590	93,0757	1212	1665	2117	2569	3020	3471	3921	4371	4820	590
600	5268	5716	6163	6609	7055	7500	7944	8388	8831	9274	600
610	9716	*0157	*0598	*1038	*1478	*1917	*2355	*2793	*3230	*3666	610
620	94,4102	4538	4973	5407	5841	6274	6707	7139	7570	8001	620
630	8431	8861	9290	9718	*0146	*0573	*1000	*1426	*1852	*2277	630
640	95,2702	3126	3549	3972	4395	4817	5238	5658	6078	6498	640
650	6917	7336	7754	8171	8588	9004	9420	9835	*0250	*0664	650
660	96,1078	1491	1904	2316	2728	3139	3549	3959	4369	4778	660
670	5186	5594	6002	6409	6815	7221	7626	8031	8436	8840	670
680	9243	9646	*0049	*0451	*0852	*1253	*1653	*2053	*2453	*2852	680
690	97,3250	3648	4045	4442	4839	5235	5631	6026	6420	6814	690
700	7208	7601	7994	8386	8778	9169	9560	9950	*0340	*0730	700
710	98,1119	1507	1895	2283	2670	3057	3443	3829	4214	4599	710
720	4983	5367	5750	6133	6516	6898	7280	7661	8042	8422	720
730	8802	9182	9561	9939	*0318	*0695	*1073	*1449	*1826	*2202	730
740	99,2577	2953	3327	3702	4075	4449	4822	5194	5567	5938	740
750	6310	6681	7051	7421	7791	8160	8529	8897	9265	9633	750
760	100,0000	0367	0733	1099	1465	1830	2194	2559	2923	3286	760
770	3649	4012	4374	4736	5098	5459	5820	6180	6540	6900	770
780	7259	7618	7976	8334	8692	9049	9406	9762	*0118	*0474	780
790	101,0829	1184	1539	1893	2247	2600	2953	3306	3658	4010	790
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

TABLE VI.

Dépressions du zéro dans les thermomètres en verre dur.

(D'après les expériences de M. Guillaume.)

t.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	*t.*
− 10°	+0,0088										− 10°
− 0	0,0000	+0,0009	+0,0018	+0,0026	+0,0035	+0,0044	+0,0053	+0,0062	+0,0070	+0,0079	− 0
+ 0	0,0000	−0,0009	−0,0018	−0,0027	−0,0036	−0,0045	−0,0054	−0,0063	−0,0072	−0,0081	+ 0
+ 10	−0,0090	−0,0099	−0,0108	−0,0117	−0,0127	−0,0136	−0,0145	−0,0154	−0,0163	−0,0173	+ 10
+ 20	−0,0182	−0,0191	−0,0201	−0,0210	−0,0220	−0,0229	−0,0238	−0,0248	−0,0257	−0,0267	+ 20
+ 30	−0,0276	−0,0286	−0,0295	−0,0305	−0,0315	−0,0324	−0,0334	−0,0344	−0,0353	−0,0363	+ 30
+ 40	−0,0373	−0,0382	−0,0392	−0,0402	−0,0412	−0,0422	−0,0432	−0,0442	−0,0451	−0,0461	+ 40
+ 50	−0,0471	−0,0481	−0,0491	−0,0501	−0,0511	−0,0521	−0,0532	−0,0542	−0,0552	−0,0562	+ 50
+ 60	−0,0572	−0,0582	−0,0593	−0,0603	−0,0613	−0,0623	−0,0634	−0,0644	−0,0654	−0,0665	+ 60
+ 70	−0,0675	−0,0686	−0,0696	−0,0706	−0,0717	−0,0727	−0,0738	−0,0748	−0,0759	−0,0770	+ 70
+ 80	−0,0781	−0,0791	−0,0801	−0,0812	−0,0823	−0,0834	−0,0844	−0,0855	−0,0866	−0,0876	+ 80
+ 90	−0,0887	−0,0898	−0,0909	−0,0920	−0,0931	−0,0942	−0,0952	−0,0963	−0,0975	−0,0986	+ 90
+100	−0,0997										+100
t.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	*t.*

TABLE VII.

Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en cristal dur pour les rapporter aux indications des thermomètres en verre dur.

(D'après les expériences de M. Guillaume.)

t.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	*t.*
0°	0,000	—0,001	—0.003	—0,004	—0,005	—0,007	—0,008	—0,009	—0,010	—0,011	0°
10	—0,012	—0,013	—0,014	—0,015	—0,016	—0,017	—0,018	—0,019	—0,020	—0,021	10
20	—0,022	—0,022	—0,023	—0,024	—0,024	—0,025	—0,026	—0,026	—0,027	—0,027	20
30	—0,028	—0,028	—0,029	—0,029	—0,029	—0,030	—0,030	—0,030	—0,030	—0,031	30
40	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	40
50	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,031	—0,030	—0,030	—0,030	—0,030	50
60	—0,029	—0,029	—0,029	—0,028	—0,028	—0,027	—0,027	—0,027	—0,026	—0,026	60
70	—0,025	—0,025	—0,024	—0,023	—0,023	—0,022	—0,021	—0,021	—0,020	—0,019	70
80	—0,019	—0,018	—0,017	—0,016	—0,015	—0,015	—0,014	—0,013	—0,012	—0,011	80
90	—0,010	—0,009	—0,008	—0,007	—0,006	—0,005	—0,004	—0,003	—0,002	—0,001	90
100	0,000										100
t.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	*t.*

TABLE VIII.

Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en cristal français ordinaire pour les rapporter aux indications des thermomètres en verre dur.

(D'après les expériences de M. Guillaume.)

t.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	*t.*
0°	0,000	—0,002	—0,003	—0,005	—0,006	—0,008	—0,009	—0,011	—0,012	—0,014	0°
10	—0,015	—0,016	—0,018	—0,019	—0,020	—0,021	—0,022	—0,023	—0,025	—0,026	10
20	—0,027	—0,028	—0,029	—0,029	—0,030	—0,031	—0,032	—0,033	—0,034	—0,034	20
30	—0,035	—0,036	—0,036	—0,037	—0,037	—0,038	—0,038	—0,039	—0,039	—0,039	30
40	—0,040	—0,040	—0,040	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	40
50	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,041	—0,040	—0,040	50
60	—0,040	—0,039	—0,039	—0,039	—0,038	—0,038	—0,037	—0,037	—0,036	—0,035	60
70	—0,035	—0,034	—0,033	—0,033	—0,032	—0,031	—0,030	—0,029	—0,028	—0,027	70
80	—0,026	—0,025	—0,024	—0,023	—0,022	—0,021	—0,020	—0,019	—0,017	—0,016	80
90	—0,015	—0,013	—0,012	—0,011	—0,009	—0,008	—0,006	—0,005	—0,003	—0,002	90
100	0,000										100
t.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	*t.*

TABLE IX.

Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en verre dur pour les rapporter aux indications du thermomètre à azote.

(D'après les expériences de M. Chappuis.)

t_v	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	t_v
— 20°	+0,159	+0,170	+0,181	+0,192	+0,204	+0,216					— 20°
— 10	+0,067	+0,075	+0,083	+0,091	+0,100	+0,109	+0,119	+0,128	+0,138	+0,148	— 10
— 0	0,000	+0,006	+0,011	+0,018	+0,024	+0,030	+0,037	+0,044	+0,051	+0,059	— 0
+ 0	0,000	—0,005	—0,011	—0,016	—0,021	—0,025	—0,030	—0,034	—0,038	—0,042	+ 0
+ 10	—0,046	—0,050	—0,053	—0,056	—0,059	—0,062	—0,065	—0,068	—0,070	—0,073	+ 10
+ 20	—0,075	—0,077	—0,079	—0,081	—0,083	—0,084	—0,086	—0,087	—0,089	—0,090	+ 20
+ 30	—0,091	—0,092	—0,093	—0,094	—0,094	—0,095	—0,095	—0,096	—0,096	—0,096	+ 30
+ 40	—0,097	—0,097	—0,097	—0,096	—0,096	—0,096	—0,096	—0,096	—0,095	—0,095	+ 40
+ 50	—0,094	—0,093	—0,093	—0,092	—0,091	—0,090	—0,089	—0,088	—0,087	—0,086	+ 50
+ 60	—0,085	—0,084	—0,083	—0,082	—0,080	—0,079	—0,077	—0,076	—0,074	—0,073	+ 60
+ 70	—0,071	—0,070	—0,068	—0,066	—0,064	—0,062	—0,061	—0,059	—0,057	—0,055	+ 70
+ 80	—0,052	—0,050	—0,048	—0,046	—0,044	—0,041	—0,039	—0,037	—0,034	—0,032	+ 80
+ 90	—0,029	—0,026	—0,024	—0,021	—0,018	—0,015	—0,012	—0,009	—0,006	—0,003	+ 90
+100	0,000	+0,003									+100
t_v	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	t_v

TABLE X.

Corrections à appliquer aux indications des thermomètres en verre dur pour les rapporter aux indications du thermomètre à hydrogène.

(D'après les expériences de M. Chappuis.)

t_v	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	t_v
— 20°	+0,172	+0,184	+0,195	+0,208	+0,220	+0,233					— 20°
— 10	+0,073	+0,082	+0,091	+0,100	+0,110	+0,119	+0,129	+0,140	+0,150	+0,161	— 10
— 0	0,000	+0,006	+0,013	+0,020	+0,027	+0,034	+0,041	+0,049	+0,057	+0,065	— 0
+ 0	0,000	—0,006	—0,012	—0,018	—0,023	—0,028	—0,033	—0,038	—0,043	—0,047	+ 0
+ 10	—0,052	—0,056	—0,060	—0,063	—0,067	—0,070	—0,073	—0,076	—0,079	—0,082	+ 10
+ 20	—0,085	—0,087	—0,089	—0,091	—0,093	—0,095	—0,097	—0,098	—0,100	—0,101	+ 20
+ 30	—0,102	—0,103	—0,104	—0,105	—0,106	—0,106	—0,107	—0,107	—0,107	—0,107	+ 30
+ 40	—0,107	—0,107	—0,107	—0,107	—0,107	—0,106	—0,106	—0,105	—0,104	—0,104	+ 40
+ 50	—0,103	—0,102	—0,101	—0,100	—0,099	—0,097	—0,096	—0,095	—0,093	—0,092	+ 50
+ 60	—0,090	—0,089	—0,087	—0,085	—0,084	—0,082	—0,080	—0,078	—0,076	—0,074	+ 60
+ 70	—0,072	—0,070	—0,068	—0,066	—0,064	—0,062	—0,059	—0,057	—0,055	—0,053	+ 70
+ 80	—0,050	—0,048	—0,045	—0,043	—0,041	—0,038	—0,036	—0,033	—0,031	—0,028	+ 80
+ 90	—0,026	—0,023	—0,021	—0,017	—0,016	—0,013	—0,010	—0,008	—0,005	—0,003	+ 90
+100	0,000	+0,003									+100
t_v	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	t_v

TABLE XI.

Formules pour la transformation des coefficients thermiques.

ÉCHELLE dans laquelle les coefficients sont donnés.	ÉCHELLE à laquelle les coefficients doivent être rapportés.	LIMITES.	FORMULES.
Cristal ordinaire.	Verre dur..	0°-40°	$\alpha_v = 1{,}0016685\,\alpha_c + 0{,}0215\,\beta_c$
			$\beta_v = -16{,}817 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_c + 1{,}00154\,\beta_c$
		0-85	$\alpha_v = 1{,}0016630\,\alpha_c + 0{,}0963\,\beta_c$
			$\beta_v = -16{,}668 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_c + 0{,}99955\,\beta_c$
Cristal dur.	Verre dur..	0-40	$\alpha_v = 1{,}0013927\,\alpha'_c + 0{,}0198\,\beta'_c$
			$\beta_v = -15{,}578 \,.\, 10^{-6}\,\alpha'_c + 1{,}00113\,\beta'_c$
		0-85	$\alpha_v = 1{,}0013227\,\alpha'_c + 0{,}0778\,\beta'_c$
			$\beta_v = -13{,}712 \,.\, 10^{-6}\,\alpha'_c + 0{,}99956\,\beta'_c$
Verre dur.	Azote.....	0-40	$\alpha_{Az} = 1{,}0052036\,\alpha_v + 0{,}0887\,\beta_v$
			$\beta_{Az} = -71{,}193 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_v + 1{,}00290\,\beta_v$
		0-85	$\alpha_{Az} = 1{,}0043183\,\alpha_v + 0{,}2543\,\beta_v$
			$\beta_{Az} = -46{,}691 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_v + 0{,}99830\,\beta_v$
Verre dur.	Hydrogène.	0-40	$\alpha_H = 1{,}0058812\,\alpha_v + 0{,}1018\,\beta_v$
			$\beta_H = -81{,}235 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_v + 1{,}00318\,\beta_v$
		0-85	$\alpha_H = 1{,}0048943\,\alpha_v + 0{,}2960\,\beta_v$
			$\beta_H = -54{,}475 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_v + 0{,}99774\,\beta_v$
Cristal ordinaire.	Hydrogène.	0-40	$\alpha_H = 1{,}0075578\,\alpha_c + 0{,}1236\,\beta_c$
			$\beta_H = -98{,}241 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_c + 1{,}00472\,\beta_c$
		0-85	$\alpha_H = 1{,}0065605\,\alpha_c + 0{,}3926\,\beta_c$
			$\beta_H = -71{,}196 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_c + 0{,}99729\,\beta_c$
Azote.....	Hydrogène..	0-40	$\alpha_H = 1{,}0006750\,\alpha_{Az} + 0{,}0130\,\beta_{Az}$
			$\beta_H = -9{,}970 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_{Az} + 1{,}00028\,\beta_{Az}$
		0-85	$\alpha_H = 1{,}0005754\,\alpha_{Az} + 0{,}0416\,\beta_{Az}$
			$\beta_H = -7{,}777 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_{Az} + 0{,}99944\,\beta_{Az}$
Acide carbonique.	Hydrogène.	0-40	$\alpha_H = 1{,}0028440\,\alpha_{CO^2} + 0{,}0436\,\beta_{CO^2}$
			$\beta_H = -34{,}308 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_{CO^2} + 1{,}00204\,\beta_{CO^2}$
		0-85	$\alpha_H = 1{,}0026060\,\alpha_{CO^2} + 0{,}1569\,\beta_{CO^2}$
			$\beta_H = -28{,}098 \,.\, 10^{-6}\,\alpha_{CO^2} + 0{,}99893\,\beta_{CO^2}$

TABLE XII.

Constantes diverses relatives à la Thermométrie.

I. Pesanteur.

g à Paris	$980{,}96 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ (d'après M. Defforges, 1889).
$g_{45;0}$	980,63 (*voir* Table III).
1 mégadyne	1,01940 kg_{poids} à Paris.
1 mégadyne	1,01975 $\text{kg}_{\text{poids}(45;0)}$
1 $\frac{\text{mégadyne}}{\text{cm}^2}$	0,9869 atmosphère.
1 atmosphère	1,0132 $\frac{\text{mégadyne}}{\text{cm}^2}$.

II. Densités a 0°.

Platine fondu	21,48-21,50
Or	19,30
Argent	10,53
Cuivre fondu	8,85
Nickel	8,90
Bronze	8,4-8,8
Laiton	8,3-8,4
Verre	2,5-2,7
Quartz	2,6508
Mercure	13,5956 (*voir* p. 36).

III. Élasticité.

Constantes élastiques du verre (d'après M. Cornu et M. Amagat).

$$\sigma = 0{,}25.$$

a. Verre dur.

$$\lambda = \mu = 2800 \frac{\text{kg}_{\text{poids}}}{\text{mm}^2} = 0{,}275.10^6 \frac{\text{mégadynes}}{\text{cm}^2},$$

$$E = 7000 \frac{\text{kg}_{\text{poids}}}{\text{mm}^2} = 0.687.10^6 \frac{\text{mégadynes}}{\text{cm}^2},$$

$$\varkappa = 0{,}214.10^{-3} \text{ pour } 1 \frac{\text{kg}_{\text{poids}}}{\text{mm}^2} = 2{,}18.10^{-6} \text{ pour } 1 \frac{\text{mégadyne}}{\text{cm}^2}$$

$$= 2{,}21.10^{-6} \text{ par atmosphère.}$$

b. Cristal dur.

$$\lambda = \mu = 2500 \frac{\text{kg}_{\text{poids}}}{\text{mm}^2} = 0{,}245.10^6 \frac{\text{mégadynes}}{\text{cm}^2},$$

$$E = 6250 \frac{\text{kg}_{\text{poids}}}{\text{mm}^2} = 0{,}613.10^6 \frac{\text{mégadynes}}{\text{cm}^2},$$

$$\varkappa = 0{,}240.10^{-1} \text{ pour } 1 \frac{\text{kg}_{\text{poids}}}{\text{mm}^2} = 2{,}45.10^{-6} \text{ pour } 1 \frac{\text{mégadyne}}{\text{cm}^2}$$

$$= 2{,}48.10^{-6} \text{ par atmosphère.}$$

Compressibilité du mercure pour $1 \frac{\text{mégadyne}}{\text{cm}^2}$:

$3{,}45.10^{-6}$	d'après	Regnault.
2,91	»	M. Grassi.
3,90	»	MM. Amaury et Descamps (corrigé).
3,87	»	M. Amagat (1889).

Compressibilité de l'eau :

A 0°....	50,3	d'après Regnault.
A 25°....	45,6	
A 0°....	51,1	» MM. Amaury et Descamps (corrigé).
A 25°....	46,0	

IV. Températures fixes.

a. Fusion.

Transition Temperature
Na2SO4 10 H2O
32.3 : 1

Eau.....	0° (1)		
Aluminium.....	625	d'après	M. Le Chatelier.
Argent.....	954	»	M. Violle.
Or.....	1035	»	»
Cuivre.....	1054	»	»
Palladium.....	1500	»	»
Platine.....	1775	»	»
Iridium.....	1950	»	»

b. Ébullition.

Eau.....	$100° + \frac{H - 760}{27{,}25}$ (2)	
Naphtaline.....	$218°{,}06 + \frac{H - 760}{17{,}1}$	d'après M. Crafts.
Benzophénone.....	$306°{,}08 + \frac{H - 760}{15{,}8}$	

(1) — 0,008 degré par atmosphère au-dessus de la pression normale

(2) Dans le voisinage de la pression normale.

V. Dilatations.

Coefficients de dilatation dans l'échelle normale (d'après M. Benoît).

		Limites.	
Verre linéaire (sans résidus).....		0°-40°	$(7184 + 8{,}00T).10^{-9}$
» cubique.....		»	$(21552 + 24{,}10T).10^{-9}$
Cristal linéaire.....		»	$(9116 + 8{,}90T).10^{-9}$
» cubique.....		»	$(27330 + 26{,}80T).10^{-9}$
Quartz...	parallèle à l'axe.....	0°-85°	$(7161 + 8{,}01T).10^{-9}$
	perpendiculaire à l'axe.	»	$(13254 + 11{,}63T).10^{-9}$
Béryl....	parallèle à l'axe.....	»	$(-1348 + 4{,}12T).10^{-9}$
	perpendiculaire à l'axe.	»	$(1002 + 4{,}57T).10^{-9}$
Spath d'Islande	parallèle à l'axe.....	»	$(25135 + 11{,}80T).10^{-9}$
	perpendiculaire à l'axe.	»	$(-5578 + 1{,}38T).10^{-9}$
Platine pur.....		»	$(8901 + 1{,}21T).10^{-9}$
Iridium pur.....		»	$(6358 + 3{,}21T).10^{-9}$
Platine iridié à 10 pour 100.....		»	$(8650 + 1{,}70T).10^{-9}$
Acier.....		»	$(10400 + 5{,}20T).10^{-9}$
Laiton.....		»	$(18600 + 5{,}50T).10^{-9}$
Bronze.....		»	$(17540 + 5{,}20T).10^{-9}$
Bronze phosphoreux.....		»	$(16800 + 4{,}85T).10^{-9}$

Coefficient de la dilatation cubique du mercure, d'après Regnault, calculé par Broch (échelle du thermomètre à air) :

$$(181792 + 0{,}175T + 0{,}035116T^2).10^{-9}.$$

La fonction ci-dessus réduite à deux termes :

Entre 0° et 100°.....	$(181652 + 4{,}845T).10^{-9}$
» 0° et 200°.....	$(181230 + 9{,}539T).10^{-9}$
» 0° et 300°.....	$(180528 + 14{,}221T).10^{-9}$

Coefficient de dilatation de l'azote sous volume constant et à la pression initiale de 1^{m} de mercure d'après M. Chappuis :

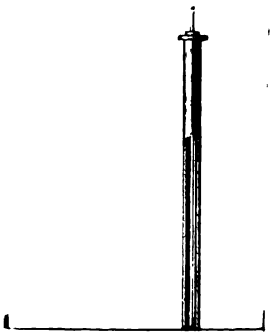
$$3{,}67700.10^{-3} - 0{,}02096.10^{-6}T - 0{,}5045.10^{-9}T^2 + 4{,}800.10^{-12}T^3.$$

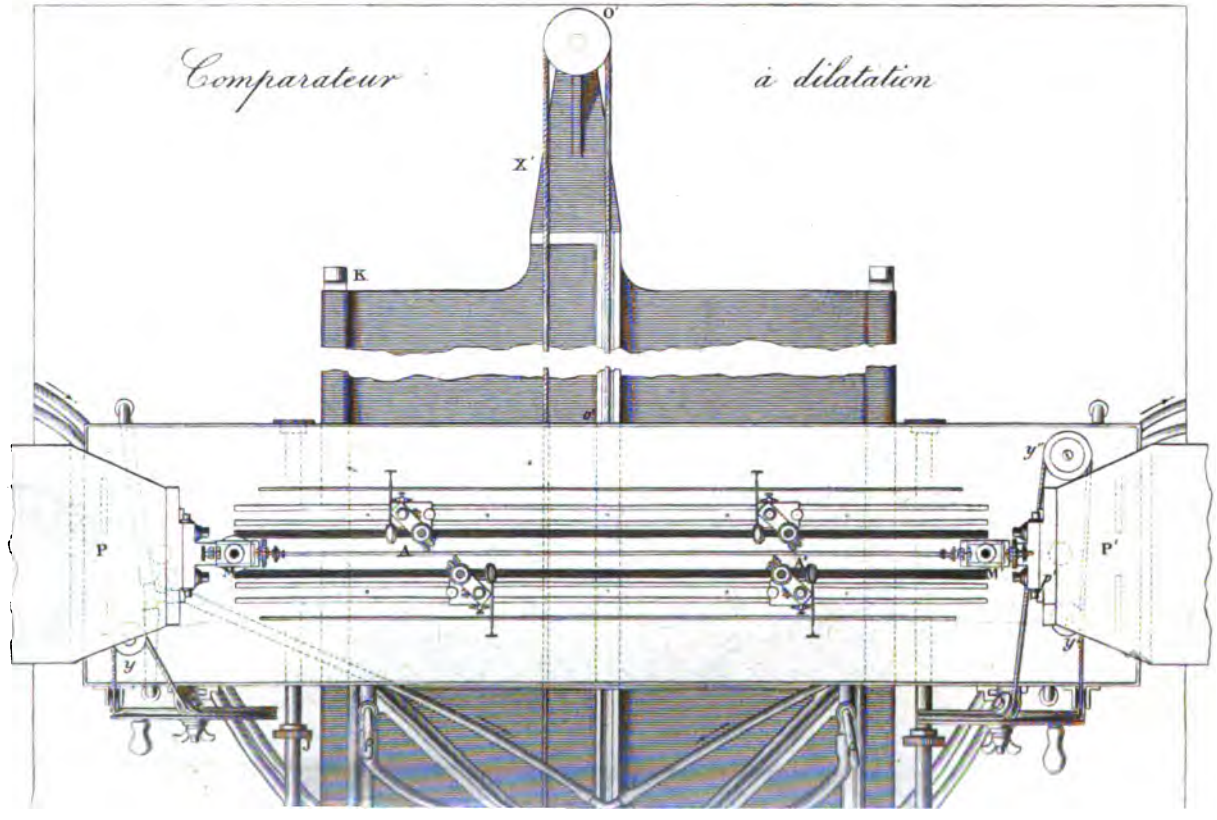
Coefficient de dilatation de l'acide carbonique dans les mêmes conditions :

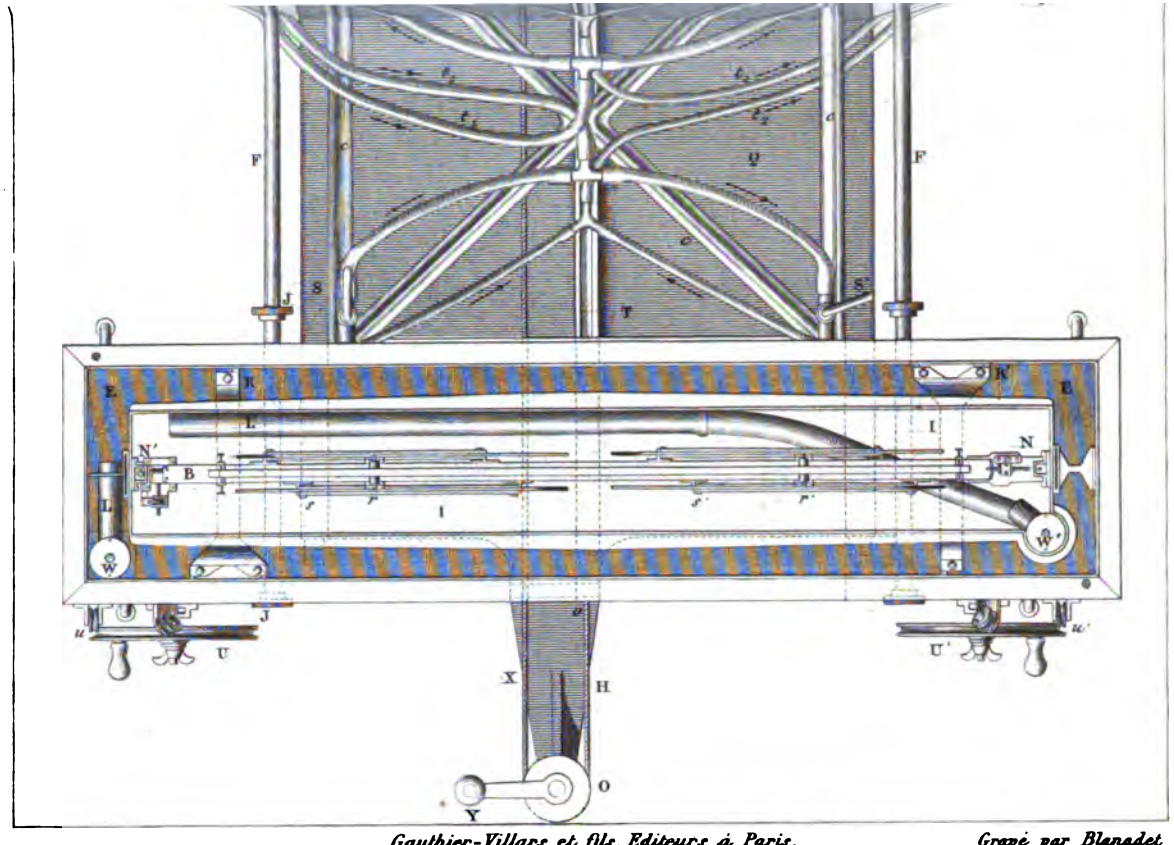
$$3{,}73538.10^{-3} - 0{,}13377.10^{-6}T + 0{,}0872.10^{-9}T^2 + 1{,}900.10^{-12}T^3.$$

FIN.

15313 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

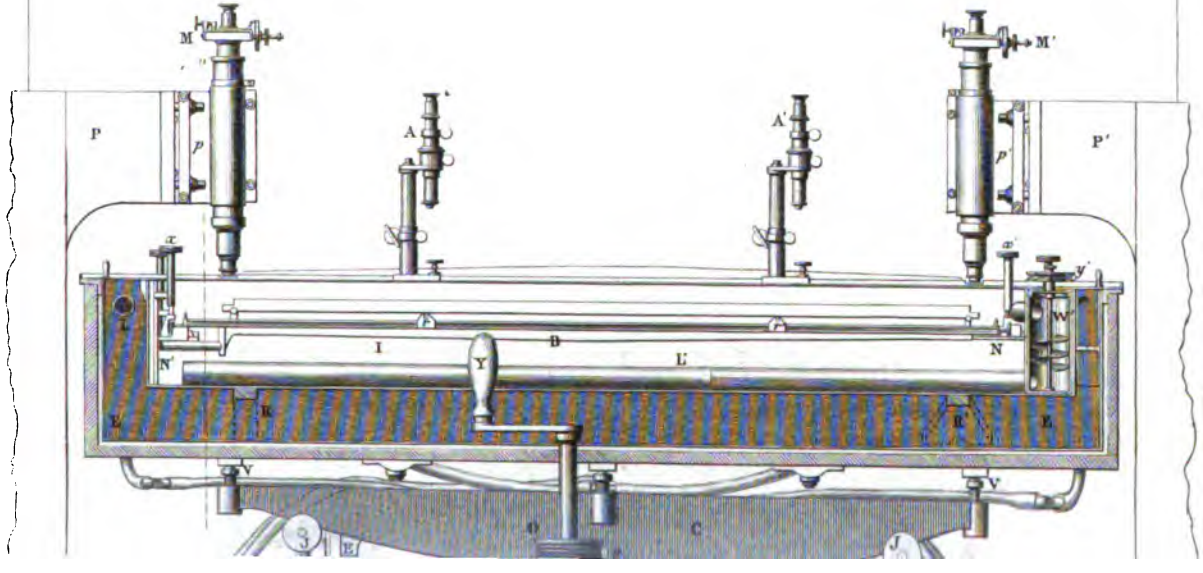


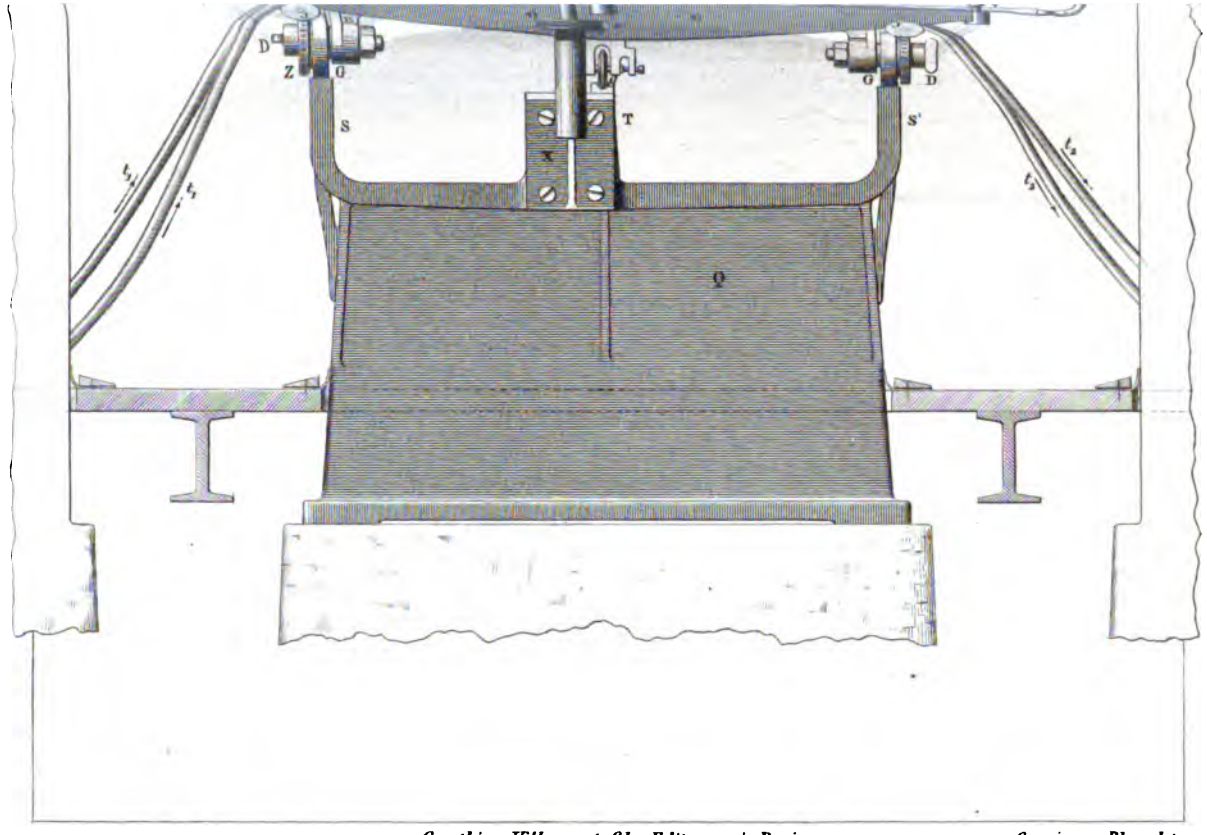

Comparateur à dilatation
O'
X'
K
P
P'
A
M
y
y'



Gauthier-Villars et fils, Editeurs, à Paris. *Gravé par Blanadet*

Comparateur à dilatation.





Gauthier-Villars et fils, Editeurs, à Paris. *Gravé par Blanadet*

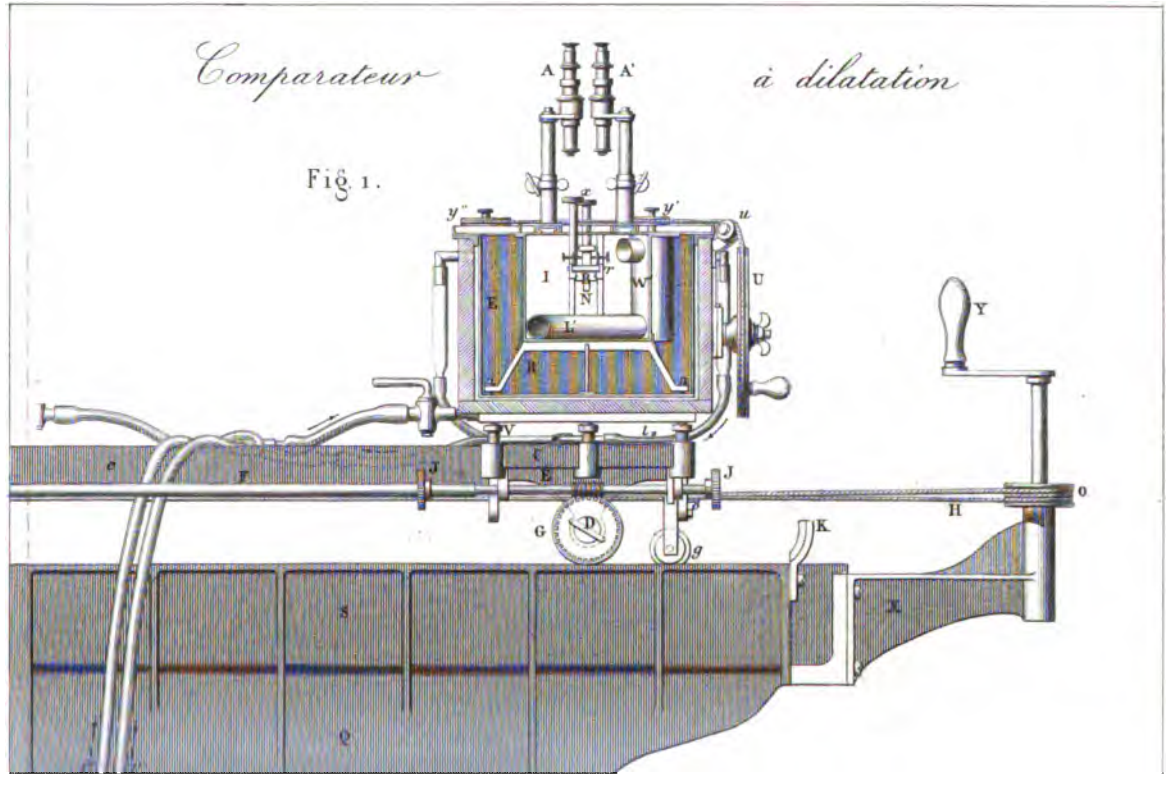
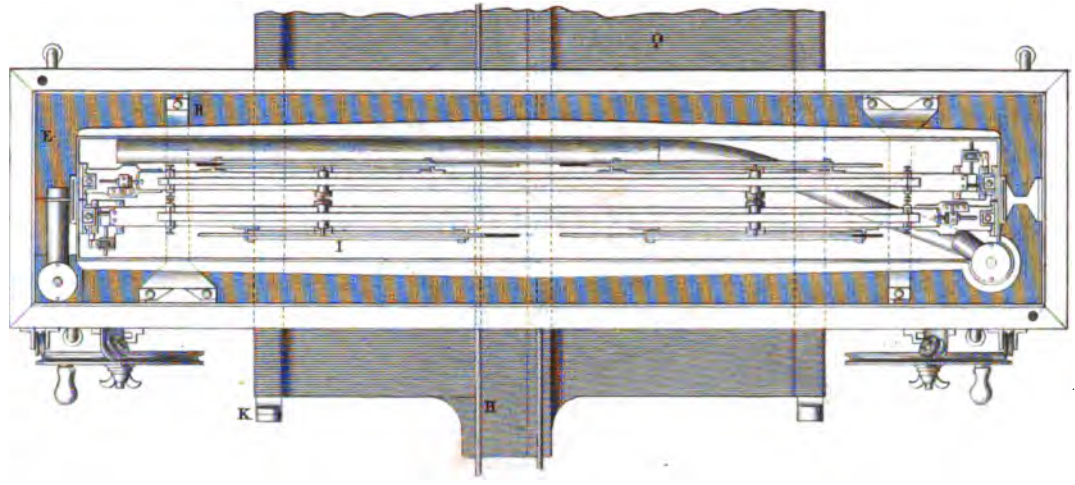

Comparateur à dilatation
Fig. 1.
A
A'
y''
y'
u
I
N
W
U
E
L'
R
Y
V
L
J
J
H
O
G
D
g
K
S
X
Q

Fig. 2



Gauthier-Villars et fils, Editeurs, à Paris *Gravé par Blanadet*

3 2044 056 166 184